Exercice Noël 10
Analyse asymptotique

Solution de l'exercice 1

1. Déterminons l'asymptote au graphe de h en $+\infty$ et la position relative. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h(x) = \exp\left(f(x)\right) = \sqrt{1+x^2} + x.$$

Donc pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
h(x) &= \sqrt{x^2}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} + x \\
&= x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2 + x \\
&\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + x \qquad \text{car } u = \frac{1}{x^2}\underset{x\to+\infty}{0} \\
&\underset{x\to+\infty}{=} x + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) + x \\
&\underset{x\to+\infty}{=} 2x + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que le graphe de h admet une asymptote d'équation

$$\boxed{y = 2x.}$$

De plus, $h(x) - 2x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x} > 0$. Or deux équivalents ont même signe au voisinage considéré. Conclusion,

$$\boxed{\text{le graphe de } h \text{ est au-dessus de son asymptote au voisinage de } +\infty.}$$

2. Montrons que f définie une bijection. On a
   - f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc notamment continue sur $\mathbb{R}$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   Donc par le théorème de la bijection, f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $J = f(\mathbb{R})$. De plus,

$$f(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[.$$

Or $f(x) = \ln\left(h(x)\right)$. Par la question précédente, $h(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc par composition,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

La fonction f est impaire donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Conclusion,

$$\boxed{f \text{ définit une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$$

On note $g = f^{-1}$ sa fonction réciproque. On admet que g possède un développement limité à l'ordre 4 en 0 donné par

$$g(x) \underset{x\to0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + o\left(x^4\right).$$

3. A l'aide du développement limité de f en 0 et la relation $\forall x \in \mathbb{R},\ g \circ f(x) = x$, déterminons le développement limité à l'ordre 4 en 0 de g. Posons $u(x) = f(x)$. On sait que

$$u(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right).$$

Donc on a bien $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$. Puis,

- on a

$$\begin{aligned}
u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{lll} x^2 & -\frac{x^4}{6} & +o\left(x^4\right) \\ & -\frac{x^4}{6} & +o\left(x^4\right) \\ & & +o\left(x^4\right) \end{array} \\
&\underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

- De plus,

$$\begin{aligned}
u(x)^3 &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right)\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x^3 + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

- *Méthode 1.* Aussi, $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc par élévation à la puissance, $u(x)^4 \underset{x\to 0}{\sim} x^4$ et donc

$$u(x)^4 \underset{x\to 0}{=} x^4.$$

  Méthode 2. Aussi,

$$\begin{aligned}
u(x)^4 = u(x)^2 u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)\right)\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x^4 + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

- Enfin,

$$o\left(u(x)^4\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^4 + o\left(x^4\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^4\right).$$

Or

$$g(u) \underset{u\to 0}{=} a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + a_4 u^4 + o\left(u^4\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
g\left(f(x)\right) &\underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 u(x) + a_2 u(x)^2 + a_3 u(x)^3 + a_4 u(x)^4 + o\left(u(x)^4\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{llllll} a_0 + a_1(x & & -\frac{x^3}{6} & & +o\left(x^4\right)) \\ & +a_2(x^2 & & -\frac{x^4}{3} & +o\left(x^4\right)) \\ & & +a_3(x^3 & & +o\left(x^4\right)) \\ & & & +a_4(x^4 & +o\left(x^4\right)) \\ & & & & +o\left(x^4\right) \end{array} \\
&\underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \left(-\frac{a_1}{6} + a_3\right)x^3 + \left(-\frac{a_2}{3} + a_4\right)x^4 + o\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g\left(f(x)\right) = x$ donc

$$x \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \left(-\frac{a_1}{6} + a_3\right) x^3 + \left(-\frac{a_2}{3} + a_4\right) x^4 + o\left(x^4\right).$$

Par unicité du développement limité,

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ -\frac{a_1}{6} + a_3 = 0 \\ -\frac{a_2}{3} + a_4 = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a_0 = a_2 = a_4 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_3 = \frac{a_1}{6} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right).}$$