

EX1

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$J_n = \int_0^{\pi} \sin(x) \frac{x}{n+x} dx \quad \text{donc par inégalité triangulaire} \checkmark$$

$$|J_n| \leq \int_0^{\pi} \left| \sin(x) \frac{x}{n+x} \right| dx \quad \text{car } \pi > 0 \checkmark$$

$$\text{et } \left| \sin(x) \frac{x}{n+x} \right| = |\sin(x)| \frac{x}{n+x} \quad \text{pour } x \geq 0$$

$$\forall x \in [0; \pi], |\sin(x)| \leq 1 \checkmark$$

$$\text{donc } |J_n| \leq \int_0^{\pi} \frac{x}{n+x} dx \checkmark$$

$$\text{et } \forall x \in [0; \pi], x \leq \pi \checkmark$$
$$n+x \geq n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+x} \leq \frac{1}{n} \checkmark$$

$$\text{donc } |J_n| \leq \int_0^{\pi} \frac{\pi}{n} dx = \frac{\pi^2}{n} \checkmark$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{n} = 0 \quad \text{donc par le théorème de l'encadrement}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |J_n| = 0 \quad \text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0 \quad \text{TB}$$

A encadrer

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n + J_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{n \sin(nx)}{1+x} dx + \int_0^{\pi} \frac{\sin(x) x}{n+x} dx \checkmark$$

Posons $t = nx$ dans la première intégrale où

On a :

$$x \mapsto nx \quad \text{est...}$$

$$I_n + J_n = \int_0^\pi n \frac{\sin\left(\frac{nt}{n}\right)}{1 + \frac{t}{n}} \frac{dt}{n} + \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{n+x} dx \quad \checkmark$$

$$= \int_0^\pi \sin(x) \left(\frac{1}{1 + \frac{x}{n}} + \frac{x}{n+x} \right) dx$$

$$= \int_0^\pi \sin(x) \left(\frac{n+x}{n+x} \right) dx \quad \checkmark$$

$$= \int_0^\pi \sin(x) dx \quad \checkmark$$

$$= [-\cos(x)]_0^\pi = 2 \quad \checkmark$$

~~col~~ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + J_n = 2$. A encadrer.

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n + J_n = 2$$

par passage à la limite

donc $I_n = \dots$ donc $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n + 0 = 2$$

donc $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 2. ✓

EX2 Soit $x \in \mathbb{R}$

$$-4 \sin(x) \cos(x) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin(x) \cos(x) \leq -\frac{1}{2} \quad \checkmark \text{ car } -2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) \leq -\frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{11\pi}{6} + 2\pi k \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad \frac{7\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{12} + k\pi \quad \checkmark$$

sol

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{7\pi}{12} + k\pi ; \frac{11\pi}{12} + k\pi \right]$$

TB à encadrer.