Correction Printemps 01
Intégration et trigonométrie

Solution de l'exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par l'inégalité triangulaire, car $\pi > 0$, on a
$$|J_n| \leqslant \int_0^\pi \left|\sin(x)\frac{x}{n+x}\right| \mathrm{d}x.$$
Or pour tout $x \in [0;\pi]$,
$$\left|\sin(x)\frac{x}{n+x}\right| \leqslant \frac{x}{n+x} \qquad \text{car } x \geqslant 0 \text{ et } n \geqslant 1.$$
Or $n+x \geqslant n \geqslant 1$. Donc $\frac{1}{n+x} \leqslant \frac{1}{n}$. De plus, $x \geqslant 0$, donc
$$\frac{x}{n+x} \leqslant \frac{x}{n} \leqslant \frac{\pi}{n}.$$
Ainsi,
$$\left|\sin(x)\frac{x}{n+x}\right| \leqslant \frac{\pi}{n}.$$
Donc par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens, on a
$$|J_n| \leqslant \int_0^\pi \frac{\pi}{n}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{n}.$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi^2}{n} = 0$. Donc par le théorème d'encadrement, $(|J_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et même
$$\lim_{n\to+\infty} |J_n| = 0.$$
Conclusion,
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = 0.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $x = nu$ i.e. $u = \frac{x}{n}$. La fonction $x \mapsto \frac{x}{n}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi]$ et $\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\,\mathrm{d}x$. Donc par changement de variable,
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} n\frac{\sin(nu)}{1+u}\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi n\frac{\sin(x)}{1+\frac{x}{n}}\frac{1}{n}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi n\frac{\sin(x)}{n+x}\,\mathrm{d}x.$$
Par suite,
$$\begin{aligned} I_n + J_n &= \int_0^\pi n\frac{\sin(x)}{n+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \sin(x)\frac{x}{n+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \sin(x)\frac{n+x}{n+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [-\cos(x)]_{x=0}^{x=\pi} \\ &= 1+1 \\ &= 2. \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n + J_n = 2.}$$

3. Par la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = 2 - J_n$. De plus, par la question 1 $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 2 - lim_{n\to+\infty} J_n = 2.$$
Conclusion,
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 2.}$$

Solution de l'exercice 2

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
-4\sin(x)\cos(x) \geqslant 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -2\sin(2x) \geqslant 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \sin(2x) \leqslant -\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \qquad -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leqslant 2x \leqslant -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \qquad -\frac{5\pi}{12} + k\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{12} + k\pi.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{5\pi}{12} + k\pi ; -\frac{\pi}{12} + k\pi\right].}$$