Exercice 1 :

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

; Calculer $g((1;1;1))$

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ x - z \\ x - y \end{pmatrix}$

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ x - z \\ x - y \end{pmatrix}.$$

$$g((1;1,1)) = \begin{pmatrix} 2-1-1 \\ 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

donc $\boxed{g((1;1;1)) = 0_{\mathbb{R}^3}}$.

2) le rang de A

$$rg(A) = rg\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$= rg \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$= rg \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1.$$

$rg(A) = rg\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \cancel{0} & 0 \end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ ✓

donc $\boxed{rg(A) = 2}$ Bien !

3) Calculer Im(A) et Ker(A).

$rg(A) = \dim(Im(A)) = 2$. ✓

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ [~~D'après la question précédente~~ les]

D'après la question précédent on sait que les deux premiers colonnes sont ~~in~~ linéairement indépendantes alors

$\boxed{Im(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$ Oui

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

[~~A ∈ Ker(A)~~ ⟺] (Résolvons $AX = 0_{\mathbb{R}^3}$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$AX = \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ x - z \\ x - y \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

d'après la question 1 on sait que $g((1,1,1)) = 0_{\mathbb{R}^3}$ ✓

A justifier par la dimension

alors $\boxed{Ker(A) = Vect((1,1,1))}$

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $S_n = \sum_{i=0}^{n} i \sum_{k=i}^{n} \binom{n+1}{k}$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i \sum_{k=i}^{n} \binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \sum_{i=0}^{k} 2^i$$ Oui

or $\sum_{i=0}^{k} 2^i$, on reconnait une somme géométrique ✓

alors $\sum_{i=0}^{k} 2^i = \dfrac{1-2^{k+1}}{1-2} = 2^{k+1}-1$ ✓

on a $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \sum_{i=0}^{k} 2^i = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \left(2^{k+1}-1\right)$$ ✓

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 2^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 2^{k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k}$$ ✓

$$= 2\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 2^{k} - 2^{n+2} - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} + 1$$ ✓

$$= 2\sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n+1}{k} 2^{k} 1^{n+1-k}\right) - 2^{n+2} - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 1^k 1^{n+1-k}$$

On reconnait des Binômes de Newton ✓ $+1$

$$S_n = 2\left[3^{n+1} - 2^{n+1}\right] - 2^{n+1} + 1$$ ✓

$$\boxed{S_n = 2\times 3^{n+1} - 3\times 2^{n+1} + 1}$$ TB !