Correction Printemps 02
Représentation matricielle et calcul algébrique

Solution de l'exercice 1

1. Par définition de g,
$$g((1,1,1)) = A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$$
Conclusion,
$$\boxed{g((1,1,1)) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}.}$$

2. Par la question précédente, $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$. Donc $\dim(\mathrm{Ker}(A)) \geqslant 1$. Par le théorème du rang,
$$\mathrm{rg}(A) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}(A)) \leqslant 3 - 1 = 2.$$
Or on observe que les deux premières colonnes de A ne sont pas colinéaires donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, C_2, C_3) \geqslant \mathrm{rg}(C_1, C_2) = 2$. Conclusion,
$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = 2.}$$

3. Par la question précédente, $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 2$. Or $C_1 = \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$ et $C_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Im}(A)$. Ainsi, (C_1, C_2) forme une base de $\mathrm{Im}(A)$:
$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}\right).$$
Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré, donc
$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(A) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}\right) && C_1 \leftarrow C_1 + C_2\\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) && C_2 \leftarrow -C_2\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right).}$$
D'autre part, puisque $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}_3}$. Alors $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(A)$. Or par le théorème du rang,
$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3 - \mathrm{rg}(A) = 3 - 2 = 1.$$

Donc $\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$ est une base de $\operatorname{Ker}(A)$:

$$\boxed{\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right).}$$

Solution de l'exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque la somme est triangulaire, on a

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n} 2^i \binom{n+1}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \sum_{i=0}^{k} 2^i \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \frac{2^{k+1}-1}{2-1} && \text{car on reconnait une somme géométrique de raison } 2 \neq 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 2^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \\
&= 2\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 2^k - 2^{n+2} - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} + 1 \\
&= 2\,(2+1)^{n+1} - 2^{n+2} - 2^{n+1} + 1 && \text{car on reconnait deux binômes de Newton} \\
&= 2 \times 3^{n+1} - 3 \times 2^{n+1} + 1.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = 2 \times 3^{n+1} - 3 \times 2^{n+1} + 1.}$$