Correction Printemps 03
Probabilités et fonctions usuelles

Solution de l'exercice 1

1. Notons A_k l'évènement « obtenir un 5 ou un 6 à l'étape k ». On observe que pour n'obtenir que n points en n lancers, il faut n'avoir eu que des résultats entre 1 et 4 :

$$(G_n = n) = \bigcap_{k=0}^{k=n} \overline{A_k}.$$

Donc, par **indépendance** des évènements A_k,

$$\mathbb{P}(G_n = n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{k=n} \overline{A_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{A_k}\right).$$

Le dé étant équilibré, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left(\overline{A_k}\right) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Dès lors,

$$\mathbb{P}(G_n = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

De même,

$$\mathbb{P}(G_n = 2n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{k=n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{3^n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(G_n = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n, \qquad \mathbb{P}(G_n = 2n) = \frac{1}{3^n}.}$$

2. Notons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Y_k la variable aléatoire retournant 1 si A_k est réalisé et 0 sinon. Alors $\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{3}$ (car le dé est équilibré). Donc $Y_k \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{3}\right)$. De plus, on observe que

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

Puisque les Y_k sont
- indépendants,
- de même loi,
- de loi de Bernoulli,

on en déduit directement que

$$\boxed{X_n \sim \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{3}\right).}$$

3. Puisque X_n est le nombre de fois où l'on a gagné 2 points, pendant également $n - X_n$ étapes, on a gagné 1 points. Donc au total le gain est de :

$$G_n = 2X_n + 1 \times (n - X_n) = X_n + n.$$

Conclusion,

$$\boxed{G_n = X_n + n.}$$

4. On rappelle que donner la loi correspond

- ou à reconnaitre une loi usuelle (uniforme, Bernoulli, binomiale)
- ou à donner l'univers et les probabilités associées.

Ici la loi n'est pas usuelle. Donnons son univers et ses probabilités. Par les deux questions précédentes, on en déduit que l'univers image de G_n est celui de la binomiale X_n : $[\![0;n]\!]$ translaté de n :

$$G_n(\Omega) = [\![n;2n]\!].$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![n;2n]\!], \qquad \mathbb{P}(G_n = k) &= \mathbb{P}(X_n + n = k) && \text{par la question précédente}\\
&= \mathbb{P}(X_n = k-n)\\
&= \binom{n}{k-n}\frac{1}{3^{k-n}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-(k-n)} && \text{car } X_n \sim \mathscr{B}\left(n,\frac{1}{3}\right)\\
&= \binom{n}{k-n}\frac{2^{2n-k}}{3^n}.
\end{aligned}$$

On peut aussi observer que $\binom{n}{k-n} = \binom{n}{n-(k-n)} = \binom{n}{2n-k}$ si besoin. Conclusion,

$$\boxed{G_n(\Omega) = [\![n;2n]\!], \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![n;2n]\!], \quad \mathbb{P}(G_n = k) = \binom{n}{k-n}\frac{2^{2n-k}}{3^n}.}$$

Ce qui est naturellement cohérent avec la question 1.

Solution de l'exercice 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f(x) \text{ existe} \quad &\Leftrightarrow \quad -1 \leqslant 2x^2 - 1 \leqslant 1\\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant 2x^2 \leqslant 2\\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x^2 \leqslant 1\\
&\Leftrightarrow \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble de définition de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{D} = [-1;1].}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f \text{ est dérivable en } x \quad &\Leftrightarrow \quad -1 < 2x^2 - 1 < 1\\
&\Leftrightarrow \quad 0 < 2x^2 < 2\\
&\Leftrightarrow \quad 0 < x^2 < 1\\
&\Leftrightarrow \quad -1 < x < 0 \ \text{ OU } \ 0 < x < 1.
\end{aligned}$$

Conclusion, le domaine de dérivabilité de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{D}' =]-1;0[\cup]0;1[.}$$

3. On commence par observer que $\mathscr{D}$ est centré en 0 : $\forall x \in \mathscr{D}$, $-x \in \mathscr{D}$. De plus,

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(-x) = \arccos\left(2(-x)^2 - 1\right) = \arccos\left(2x^2 - 1\right) = f(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est paire.}}$$

4. Soit $x \in]0;1[$. La fonction f est dérivable sur $]0;1[$ et

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(2x^2-1\right)' \times \frac{-1}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} \\
&= 4x \times \frac{-1}{\sqrt{1-(4x^4-4x^2+1)}} \\
&= -\frac{4x}{\sqrt{1-4x^4+4x^2-1}} \\
&= -\frac{4x}{\sqrt{4x^2\left(1-x^2\right)}} \\
&= -\frac{4x}{2x\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{CAR } x>0 \\
&= -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

On observe alors

$$\forall x \in \left]0;1\right[, \qquad f'(x) = 2\arccos'(x).$$

Dès lors,

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \left]0;1\right[, \qquad f(x) = 2\arccos(x) + C$$

En évaluant en $\sqrt{2}/2$, on a

$$\arccos\left(2\times\frac{1}{2}-1\right) = 2\frac{\pi}{4}+C \iff \arccos(0) = \frac{\pi}{2}+C \iff \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}+C \iff C=0.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \left]0;1\right[, \qquad f(x) = 2\arccos(x).$$

On pouvait aussi utiliser la continuité en 0 ou en 1 ou l'évaluation en $x = 1/2$ ou $x = \sqrt{3}/2$. Cela permet notamment de vérifier son résultat en testant une autre valeur.

De plus, en 0, on a

$$f(0) = \arccos\left(-1\right) = \pi \text{ et } 2\arccos(0) = 2\times\frac{\pi}{2} = \pi.$$

De même en 1,

$$f(1) = \arccos\left(2-1\right) = \arccos\left(1\right) = 0 \text{ et } 2\arccos(1) = 0.$$

Donc la formule reste vraie en 0 et en 1 :

$$\boxed{\forall x \in \left[0;1\right], \qquad f(x) = 2\arccos(x).}$$

5. Par parité, pour tout $x \in [-1;0]$, en posant $y = -x \in [0;1]$,

$$f(x) = f\left(-y\right) = f(y) = 2\arccos(y) = 2\arccos\left(-x\right).$$

La fonction arccos admet le point $(0, \frac{\pi}{2})$ pour centre de symétrie :

$$\forall u \in \left[-1;1\right], \qquad \frac{\arccos\left(-u\right)+\arccos(u)}{2} = \frac{\pi}{2} \qquad \iff \qquad \arccos\left(-u\right) = \pi - \arccos(u).$$

Ainsi,

$$\forall x \in \left[-1;0\right], \qquad f(x) = 2\pi - 2\arccos(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left[-1;0\right], \qquad f(x) = 2\pi - 2\arccos(x).}$$