Correction Printemps 04
Intégration et calcul d'intégrales

Solution de l'exercice 1 La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc notamment sur $[1;4]$ donc I existe. Posons pour tout $t \in [1;4]$, $s = \sqrt{t}$ i.e. $t = s^2$. La fonction $s \mapsto s^2$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[1;2]$ et $\mathrm{d}t = 2s\,\mathrm{d}s$. Donc par le théorème de changement de variable

$$I = \int_1^2 \mathrm{e}^s\, 2s\,\mathrm{d}s = 2\int_1^2 s\,\mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s.$$

Posons,

$$\forall s \in [1;2[\,, \qquad \begin{cases} u(s) = \mathrm{e}^s \\ v(s) = s \end{cases}.$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall s \in [1;2[\,, \qquad \begin{cases} u'(s) = \mathrm{e}^s \\ v'(s) = 1 \end{cases}.$$

Donc par intégration par parties,

$$I = 2\left([s\,\mathrm{e}^s]_1^2 - \int_1^2 \mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s\right) = 2\left(2\,\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^1 - \left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^1\right)\right) = 2\,\mathrm{e}^2\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{I = 2\,\mathrm{e}^2\,.}$$

Solution de l'exercice 2

1. Soit $f : t \mapsto \frac{1}{\arcsin(\sqrt{|t|})}$. La fonction f est définie et même continue sur $[-1;0[\cup]0;1]$ comme composée de fonctions usuelles. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour que la borne inférieure soit dans le domaine de continuité de f, on note déjà qu'il faut que $x \in [-1;0[\cup]0;1]$. D'autre part si $x < 0$, alors $0 \in [x;x^2]$ et donc $[x;x^2]$ n'est pas inclus dans $[-1;0[\cup]0;1]$. Si $x \in]0;1]$, alors $0 < x^2 < x \leqslant 1$. Donc $[x^2;x] \subseteq]0;1]$. Donc f est continue sur $[x^2;x]$. Donc
$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\arcsin(\sqrt{|t|})} \text{ existe.}$$
Conclusion, le domaine de définition de φ est
$$\boxed{\mathscr{D} =]0;1]\,.}$$

2. Soit $x \in]0;1]$. Puisque f est continue sur $]0;1]$, elle admet des primitives sur cet intervalle. Soit F une primitive de f sur cet INTERVALLE. Alors par le théorème fondamental de l'analyse, puisque $[x^2;x] \subseteq]0;1]$,
$$\varphi(x) = F\left(x^2\right) - F(x).$$
Puisque f est continue, F est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;1]$. Donc par composée et différence de fonctions $\mathscr{C}^1$, on en déduit que $\boxed{\varphi \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]0;1]}$ et
$$\boxed{\forall x \in]0;1]\,, \qquad \varphi'(x) = 2xf\left(x^2\right) - f(x) = \frac{2x}{\arcsin(x)} - \frac{2}{\arcsin\left(\sqrt{x}\right)}.}$$

3. Posons $h : t \mapsto \arcsin(t) - t$. La fonction h est définie et même dérivable sur $[0;1[$ et pour tout $t \in [0;1[$,

$$h'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - 1 = \frac{1-\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Or $1 - t^2 \leqslant 1$, donc $1 - \sqrt{1-t^2} \geqslant 0$. Donc

$$\forall t \in]0;1[, \qquad h'(t) \geqslant 0.$$

Donc la fonction h est croissante sur $[0;1[$ et par continuité sur $[0;1[$. Or $h(0) = 0$. Donc

$$\forall t \in [0;1[, \quad h(t) \geqslant h(0) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall t \in [0;1[, \quad \arcsin(t) \geqslant t.$$

Soit $x \in]0;1[$. Pour tout $t \in [x^2;x]$, on a $\sqrt{t} \in]0;1]$, donc $\arcsin\left(\sqrt{t}\right) \geqslant \sqrt{t} > 0$. Par passage à l'inverse

$$\forall t \in \left[x^2;x\right], \qquad \frac{1}{\arcsin\left(\sqrt{t}\right)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Donc par croissance de l'intégrale, car $x^2 \leqslant x$,

$$0 \leqslant \int_x^{x^2} \frac{1}{\arcsin\left(\sqrt{t}\right)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sqrt{t}}{2}\right]_{t=x}^{t=x^2} = \frac{x-\sqrt{x}}{2} \leqslant \frac{x}{2}.$$

D'où,

$$0 \geqslant \varphi(x) \geqslant -\frac{x}{2}.$$

Or $-\frac{x}{2} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} 0$. Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varphi(x) = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } \varphi(0) = 0.}$$