Exercice Printemps 05
Représentation matricielle / Algèbre linéaire

Exercice 1 On reprend l'exercice de révision 2 de mercredi. Soient $\mathscr{B}_1 = \left(1, X+1, (X+1)^2\right)$ et $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}_2[X]\right)$ l'application telle que $\text{mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = A$.

1. Vérifier que $\mathscr{B}_1$ est bien une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer f.
3. Déterminer $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$.

Exercice 2 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E. On suppose que f et g commutent : $f \circ g = g \circ f$. On suppose également que

$$E = \text{Ker}(f) + \text{Ker}(g).$$

1. Montrer que $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
2. En déduire que $\text{Im}(f) \subseteq \text{Ker}(g)$.
3. On suppose de plus E de dimension finie et $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(g)$ en somme directe. Montrer alors que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$.