# Exercice 5

Ⓘ

1- Montrons que $B_1$ est libre. Soient $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

Ok ! On pouvait aussi voir que les degrés sont distincts.

$$\lambda_0 + (X+1)\lambda_1 + (X+1)^2\lambda_2 = 0$$ ✓

$$\Leftrightarrow \lambda_0 + \lambda_1 + X\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2 2X + \lambda_2 X^2 = 0$$ ✓

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$ par unicité des coefficients d'un polynôme ✓

$$\Leftrightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$ ✓

Donc $B_1$ est libre. Bien

De plus, $\text{Card}(B_1) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$

Bien

Conclusion : $\boxed{B_1 \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$ ✓

$$\begin{array}{c|ccc} & f(1) & f(X+1) & f((X+1)^2) \\ \hline 1 & & & \\ X+1 & & & \\ (X+1)^2 & & & \end{array}$$

2. On a : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

De plus :

$f(1) = 2.1 \quad f(X+1) \quad f(X+1)^2 = \cancel{-X^2} - X$

$f(X+1) = +1 - (X^2+1)^2 = -X^2 - 2X$

$f((X+1)^2) = 1 - (X+1) = -X$

A reprendre

Ainsi on a :

Si $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ Que valent $x, y, z$ ?

$P(X) = x.1 + y(X+1) + z(X+1)$

car $f$ est linéaire $\quad f(P(X)) = x.f(1) + y\,f(X+1) + z.f((X+1)^2)$

$= x(-X^2 - X) + y(-X^2 - 2X) + z(-X)$

$= -Xx - X^2x - 2Xy - X^2y - Xz$

$= X(-x - 2y - z) + X^2(-x - y)$

Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 & \mapsto & (-a_0 - 2a_1 - a_2)X + (-a_0 - a_1)X^2 \end{array}}$$

c'est louche non ?

Si $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$

$f(P) \neq a_0 + a_1X + a_2X^2$

3. Soit $x \in \mathbb{R}_2[X]$.

$x \in Ker(f) \iff f(x) = 0$

$\iff a_0 + a_1X + a_2X^2 = 0$

$\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$ par unicité des coefficients d'un polynôme

donc $Ker(f) = \{0\}$ et $\dim(Ker(f)) = 0$
Ainsi par le théorème du rang on a :

$$\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$$
$$\Leftrightarrow \dim(Im(f)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$$

Donc $Im(f) = \mathbb{R}_2[X]$

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} Ker(f) = \{0\} \\ Im(f) = \mathbb{R}_2[X] \end{array}}$

II

1. Prenons $x \in E$, donc $x = u + v$ avec $u \in Ker(f)$ et $v \in Ker(g)$. oui !
Montrons que $g(f(x)) = 0$.
On a :

$f(x) = f(u+v) = f(u) + f(v)$ car $f$ linéaire ✓

Or $u \in Ker(f)$ donc $f(u) = 0$ oui, donc

$f(v) = f(x)$ ✓ $\Rightarrow g(f(x)) = g(f(v))$ ✓

$\Leftrightarrow f(g(x)) = f(g(v))$ car $f$ et $g$ commutent oui !

Or $v \in Ker(g)$ donc $g(v) = 0$ ✓, donc

$f(g(x)) = 0 = g(f(x)) \Leftrightarrow \boxed{g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}}$ TB !

2. Par la question précédente on comprend que toute image de $f$ est dans le noyau de $g$, donc $Im(f) \subset Ker(g)$.

$$y \in Im(f) \Leftrightarrow \exists x \in E,\ f(x) = y$$

Or $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ $\cancel{\Leftrightarrow}$ $g(f(x)) = 0$

$\Leftrightarrow g(y) = 0$

$\Rightarrow y \in Ker(g)$

Donc $\boxed{Im(f) \subset Ker(g)}$ OK

3. X