Correction Printemps 05
Représentation matricielle / Algèbre linéaire

Solution de l'exercice 1

1. La famille $\mathscr{B}_1$ est une famille de polynôme de degrés distincts. Donc $\mathscr{B}_1$ est libre. Or $\operatorname{Card}(\mathscr{B}_1) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$. Conclusion,
$$\boxed{\mathscr{B}_1 \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$
On pouvait aussi donner sa matrice et vérifier que cette matrice était inversible.

2. *Méthode 1.* Par définition, on a
$$\begin{aligned} f(1) &= 2 + (X+1) + (X+1)^2 = X^2 + 3X + 4 \\ f(X+1) &= -1 - (X+1)^2 = -X^2 - 2X - 2 \\ f\left((X+1)^2\right) &= -1 - (X+1) = -X - 2. \end{aligned}$$
Or par linéarité, $f(X+1) = f(X) + f(1)$. Donc
$$f(X) = f(X+1) - f(1) = -X^2 - 2X - 2 - X^2 - 3X - 4 = -2X^2 - 5X - 6.$$
De même, $f\left((X+1)^2\right) = f(X^2) + 2f(X) + f(1)$. Donc
$$\begin{aligned} f\left(X^2\right) &= f\left((X+1)^2\right) - 2f(X) - f(1) \\ &= -X - 2 - 2\left(-2X^2 - 5X - 6\right) - \left(X^2 + 3X + 4\right) \\ &= 3X^2 + 6X + 6. \end{aligned}$$
Finalement pour $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, on a
$$\begin{aligned} f(P) &= a\left(3X^2 + 6X + 6\right) + b\left(-2X^2 - 5X - 6\right) + c\left(X^2 + 3X + 4\right) \\ &= (3x - 2b + c)X^2 + (6a - 5b + 3c)X + 6a - 6b + 4c. \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ aX^2 + bX + c & \mapsto & (3a - 2b + c)X^2 + (6a - 5b + 3c)X + 6a - 6b + 4c. \end{array}}$$
Méthode 2. Posons $\mathscr{C} = (1, X, X^2)$ la base canonique et $\tilde{P} = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}_1)$. Alors,
$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Posons $B = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f)$ et $P = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = \tilde{P}^{-1}$. Alors par la formule de changement de base :
$$B = P^{-1}AP.$$
Attention ! Cette fois la formule est un peu inversée : on ne doit pas prendre $\tilde{P}$ mais bien P ! En effet « l'ancienne base » est $\mathscr{B}_1$ tandis que « la nouvelle base » est $\mathscr{C}$. C'est pourquoi la formule de changement de base est à bien comprendre avec l'interprétation ancienne → nouvelle base.

On a les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{array}{lcr}
\tilde{P} \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array} & I_3 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

On retrouve (après avoir vérifié son résultat !) que $\tilde{P}$ est inversible et $P = \tilde{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc par la formule de changement de base

$$\begin{aligned}
B &= \tilde{P} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$f(1) = X^2 + 3X + 4, \qquad f(X) = -2X^2 - 5X - 6, \qquad f\left(X^2\right) = 3X^2 + 6X + 6.$$

Finalement, comme dans la méthode 1, pour $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\begin{aligned}
f(P) &= a\left(3X^2 + 6X + 6\right) + b\left(-2X^2 - 5X - 6\right) + c\left(X^2 + 3X + 4\right) \\
&= (3x - 2b + c) X^2 + (6a - 5b + 3c) X + 6a - 6b + 4c.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ aX^2 + bX + c & \mapsto & (3a - 2b + c) X^2 + (6a - 5b + 3c) X + 6a - 6b + 4c. \end{array}}$$

3. Puisque d'après l'exercice de mercredi $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ forme une base de $\operatorname{Im}(A)$, en posant P_1 et P_2 tel que $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1}(P_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1}(P_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, alors (P_1, P_2) est une base de $\operatorname{Im}(f)$. On a

$$P_1 = 1 + (X+1) = X + 2 \qquad \text{et} \qquad P_2 = 1 + (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1.$$

De même $P_3 = 1 + (X+1) + (X+1)^2 = X^2 + 3X + 3$ est une base de $\operatorname{Ker}(f)$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(X + 2, X^2 + 2X + 1\right) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(X^2 + 3X + 3\right).}$$

Solution de l'exercice 2

1. Soit $x \in E$. Alors par hypothèse, il existe $(x_1, x_2) \in \text{Ker}\,(f) \times \text{Ker}\,(g)$ tel que
$$x = x_1 + x_2.$$
Alors en composant par $g \circ f$, on a par linéarité de $g \circ f$,
$$g \circ f\,(x) = g \circ f\,(x_1) + g \circ f\,(x_2)\,.$$
Or $x_1 \in \text{Ker}\,(f)$. Donc $f\,(x_1) = 0_E$. Puis comme g est linéaire,
$$g \circ f\,(x_1) = g\,(f\,(x_1)) = g\,(0_E) = 0_E.$$
Ainsi,
$$g \circ f\,(x) = g \circ f\,(x_2)\,.$$
Or par hypothèse, $g \circ f = f \circ g$ et on a $x_2 \in \text{Ker}\,(g)$. Donc
$$g \circ f\,(x) = f \circ g\,(x_2) = f\,(g\,(x_2)) = f\,(0_E) = 0_E.$$
Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on en déduit que
$$\boxed{g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$
2. Soit $x \in \text{Im}\,(f)$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = f\,(y)$. Donc par ce qui précède,
$$g\,(x) = g\,(f\,(y)) = g \circ f(y) = 0_{\mathscr{L}(E)}\,(y) = 0_E.$$
Ainsi $x \in \text{Ker}\,(g)$. Conclusion,
$$\boxed{\text{Im}\,(f) \subseteq \text{Ker}\,(g)\,.}$$
3. On suppose de plus E de dimension finie et $\text{Ker}\,(f)$ et $\text{Ker}\,(g)$ en somme directe. Puisque l'on avait également $E = \text{Ker}\,(f) + \text{Ker}\,(g)$, on en déduit que $\text{Ker}\,(f)$ et $\text{Ker}\,(g)$ sont supplémentaires :
$$E = \text{Ker}\,(f) \oplus \text{Ker}\,(g)\,.$$
Donc, comme E est de dimension finie, on a en particulier
$$\dim\,(E) = \dim\,(\text{Ker}\,(f)) + \dim\,(\text{Ker}\,(g))\,.$$
Puis par le théorème du rang (ici l'espace de **départ** est aussi E) : on en déduit que
$$\dim\,(E) = \dim\,(E) - \dim\,(\text{Im}\,(f)) + \dim\,(\text{Ker}\,(g)) \qquad \Leftrightarrow \qquad \dim\,(\text{Im}\,(f)) = \dim\,(\text{Ker}\,(g))\,.$$
Et puisque par la question précédente, on a $\text{Im}\,(f) \subseteq \text{Ker}\,(g)$, on en conclut que
$$\boxed{\text{Im}\,(f) = \text{Ker}\,(g)\,.}$$