

Exercice 1):

1) Montrons que B_1 est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\text{On a: } B_1 = (1, X+1, (X+1)^2) \\ = (1, X+1, X^2+2X+1) \quad \checkmark$$

Ainsi on a:

$$\text{Vect}(B_1) = \text{Vect}(1, X+1, X^2+2X+1)$$

De plus, les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. $\checkmark$

Donc on a:

$$\text{Vect}(B_1) = \text{Vect}(1, X, X^2+2X) \quad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array} \quad \checkmark$$

$$= \text{Vect}(1, X, X^2) \quad C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2 \quad \checkmark$$

$$= \mathbb{R}_2[X] \quad \text{car on reconnaît} \\ \text{la base canonique de} \\ \mathbb{R}_2[X] \quad \checkmark$$

Donc B_1 est une ~~base~~ ^{génératrice} de $\mathbb{R}_2[X]$.

2). On a: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

Et on a: $\text{mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = A$

On a aussi que $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

De plus, on a:

$$f(1) = 2 + (1+2) + (1+2)^2 \quad \checkmark \text{ oui}$$

$$= x^2 + 3x + 4$$

$$f(x+2) = -1 - (x+2)^2 \quad \checkmark$$

$$= -x^2 - 2x - 2 \quad \checkmark$$

$$f((x+2)^2) = -1 - (x+2)$$

$$= -x - 2 \quad \checkmark$$

De plus, on a: $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$

Donc on a: $f(x+2) = f(x) + f(1)$ car f est linéaire ✓

$$\Rightarrow f(x) = f(x+2) - f(1) \quad \checkmark$$

$$= -x^2 - 2x - 2 - x^2 - 3x - 4$$

$$= -2x^2 - 5x - 6 \quad \checkmark$$

Et on a:

$$f((x+2)^2) = f(x^2 + 2x + 1)$$

$$= f(x^2) + 2f(x) + f(1) \quad \text{oui}$$

$$\Rightarrow f(x^2) = f((x+2)^2) - 2f(x) - f(1) \quad \checkmark$$

$$f(x^2) = -x-2 - 2(-2x^2-5x-6) - (x^2+3x+4) \quad \checkmark$$

$$= -x-2 + 4x^2+10x+12 - x^2-3x-4 \quad \checkmark$$

$$= 3x^2+6x+6 \quad \checkmark$$

Don pose $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X],$

Don a:

$$f(P) = f(aX^2 + bX + c)$$

$$= af(x^2) + bf(x) + cf(1) \quad \text{car } f \text{ est linéaire,}$$

$$= a(3x^2+6x+6) + b(-2x^2-5x-6) + c(x^2+3x+4) \quad \checkmark$$

$$= (3a-2b+c)x^2 + (6a-5b+3c)x + (6a-6b+4c) \quad \checkmark$$

Ainsi on a:

$$f: \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

$$f: \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

$$aX^2 + bX + c \longrightarrow (3a-2b+c)X^2 + (6a-5b+3c)X + (6a-6b+4c)$$

TB!

3) Déterminer $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$.

On a: $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Soit $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $P = aX^2 + \dots$

On a: $P \in \text{Ker}(f) \iff f(P) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ ✓
Par unicité des...

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ 6a - 5b + 3c = 0 \\ 6a - 6b + 4c = 0 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ -b + c = 0 & L_1 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -2b + 2c = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ b = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc on a: $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\}$.

Exercice 21, 11: Montrer que $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On a: $E = \text{Ker}(g) + \text{Im}(f)$,

Soit $x \in E$ On a donc:

$$\exists (x_1, x_2) \in \dots$$

$$x = \underbrace{x_1}_{\text{Ker}(g)} + \underbrace{x_2}_{\text{Im}(f)}$$

Alors on a:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \checkmark$$

$$= g(f(x_1 + x_2)) \checkmark$$

$$= g(f(x_1) + f(x_2)) \quad \text{car } f \in \mathcal{L}(E) \checkmark$$

$$= g(f(x_1)) \quad \text{car } f(x_2) = 0_E \checkmark$$

$$\text{car } x_2 \in \text{Ker}(f) \checkmark$$

$$= f \circ g(x_1)$$

$$= f(g(x_1)) \quad \text{car } f \text{ et } g \text{ commutent}$$

$$= f(0_E)$$

$$\text{car } x_1 \in \text{Ker}(g) \checkmark$$

$$= 0_E \checkmark$$

Donc on a bien $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Bien

2); Montrons que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

Soit $x \in E$. On a $f(x) \in \text{Im}(f) = E$ ✓
Et on a: $f(x) \in \text{Im}(f)$ ✓

Ainsi on a:

De plus on a montré que:
~~On a~~ $g \circ f = 0_{L(E)}$.

Donc on a: $g \circ f(x) = g(f(x)) = 0_E$ ✓

$$\Rightarrow f(x) \in \text{Ker}(g) \quad \checkmark$$

Pas clair, le raisonnement doit nécessairement commencer par y dans $\text{Im}(f)$.

Donc on a bien:

$$\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$$

3); On a: $\dim(E) = n \in \mathbb{N}$
Et on a: $\text{Ker}(g) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Montrons que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$.

On a déjà montré que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$ ✓

Montrons maintenant que $\text{Ker}(g) \subset \text{Im}(f)$.

~~Soit $y \in \text{Im}(f) = E$. Soit $y \in \text{Ker}(g)$~~ ✓

On a: ~~$g \circ f(y) = 0_E$~~ $g(y) = 0_E$ ✓

$$\Rightarrow f(y) = 0_E$$

~~$f(g) \in \text{Im}(f)$~~

~~Cas pour $g = g(g)$.~~

~~$f(g)$~~  $\Rightarrow f(g(g)) = f(0_E)$
 $= 0_E$
 $\Rightarrow g(g) \in \text{Ker}(f)$ ✓

Il faut bien sûr utiliser ici des arguments de dimension.