

Exercice Printemps 06

Séries / Equations complexes

Exercice 1 On pose $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-u_n} u_n$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
2. Peut-on en déduire la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$?
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$. Exprimer la somme partielle de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ en fonction de v_0 et v_{n+1} .
4. En déduire la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

Exercice 2 Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on définit $A(i)$, $M(z)$ et $N(z^2 + z + 1)$.

1. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tels que AMN soit un triangle rectangle en M .
2. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tels que AMN soit un triangle isocèle rectangle en M .