

Exercice 1

Par récurrence

$\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$ en fait que produit de deux éléments positifs.

Comme U_n est non nul on a :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{e^{-U_n} U_n}{U_n} = e^{-U_n} \text{ car}$$

$$\forall U_n > 0, e^{-U_n} \leq 1. \quad \checkmark$$

On a alors une suite décroissante à termes strictement positifs.

Soit l la limite de U_n .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$$

Alors on a alors

$$l = e^{-l} l \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow e^{-l} = 1$$

$$\Leftrightarrow l = 0 \quad \checkmark$$

ou $l = 0$ car $l \neq 0$ car la suite est strictement positive
ex: $\frac{1}{n} > 0$ et $\frac{1}{n} \rightarrow 0$

~~(alors car l n'appartient pas à $\mathbb{Q}$)~~

Donc la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. $\checkmark$

2. On ne peut pas en déduire la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$
 car $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ car $\sum_{n=100} \frac{1}{n}$ diverge. ✓

3.

On pose $v_n \in \mathbb{R}$, $v_n = \ln(u_n)$

$$\begin{aligned} \text{Donc on a : } v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) \\ &= -u_n + \ln(u_n) \\ &= -u_n + v_n \quad \text{oui} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow u_n = -v_{n+1} + v_n \quad \checkmark$$

On a alors la ~~somme~~ série suivante.

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (v_k - v_{k+1}) \quad \text{oui}$$

On reconnaît alors une série télescopique et
 on a donc : oui

$$\sum_{k=0}^n (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1} \quad \checkmark$$

4.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(u_n)) = -\infty \quad \text{oui}$$

Donc par la question 3) on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 - v_{n+1}) = 100 \quad \text{TB}$$

donc la série diverge.

$\sum_{n \in \mathbb{N}} U_n$ diverge. TB à encadrer.

Exercice 2.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$

Aussi, On a: $A(z)$, $M(z)$ et $N(z^2 + z + 1)$

~~AMN rectangle $\Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MN} = \vec{0}$~~

Soit α l'angle entre $\vec{MA}$ et $\vec{MN}$

Soit $b \in \mathbb{N}$

AMN rectangle $\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + b\pi$

cf corrigé.

~~or A , M et N sont
non confondus donc
c'est l'angle entre les
deux qui est~~