Correction Printemps 06
Séries / Equations complexes

Solution de l'exercice 1

1. On observe que par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{-u_n} \leqslant 1$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} \leqslant u_n \qquad \text{car } u_n \geqslant 0.$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Ainsi, par le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{-u_n} u_n$ donc par passage à la limite, continuité de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x} x$ en ℓ et la caractérisation séquentielle de la continuité,

$$\ell = \mathrm{e}^{-\ell}\ell \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell = 0 \ \text{ OU } \ 1 = \mathrm{e}^{-\ell} \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$$

2. On ne peut pas en déduire la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ seulement que cette série ne diverge pas grossièrement.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$. Par la relation de récurrence, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) \\ &= \ln\left(\mathrm{e}^{-u_n} u_n\right) \\ &= -u_n + \ln(u_n) \\ &= v_n - u_n. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n - v_{n+1}.$$

En sommant, on reconnait une somme télescopique :

$$\forall n \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = v_0 - v_{n+1}.}$$

4. On sait que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = -\infty.$$

Par la question précédente, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ diverge.}}$$

Solution de l'exercice 2

1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Puisque $z \neq i$, on note que $A \neq M$ et $i - z \neq 0$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{ll}
& AMN \text{ rectangle en } M \\
\Leftrightarrow & \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MN}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \\
\Leftrightarrow & \arg\left(z_M - z_N\right) - \arg\left(z_A - z_M\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \\
\Leftrightarrow & \arg\left(z - \left(z^2+z+1\right)\right) - \arg\left(i - z\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \\
\Leftrightarrow & \arg\left(\dfrac{-z^2-1}{i-z}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \qquad \text{car } i - z \neq 0 \\
\Leftrightarrow & \dfrac{z^2+1}{z-i} \in i\mathbb{R} \\
\Leftrightarrow & \dfrac{z^2+1}{z-i} = -\overline{\left(\dfrac{z^2+1}{z-i}\right)} \\
\Leftrightarrow & \dfrac{z^2+1}{z-i} = -\dfrac{\overline{z}^2+1}{\overline{z}+i} \\
\Leftrightarrow & |z|^2 z + iz^2 + \overline{z} + i = -\left(|z|^2\,\overline{z} + z - i\overline{z}^2 - i\right) \qquad \text{car } z - i \neq 0 \\
\Leftrightarrow & |z|^2 z + iz^2 + \overline{z} + i = -|z|^2\,\overline{z} - z + i\overline{z}^2 + i \\
\Leftrightarrow & |z|^2\left(z+\overline{z}\right) + i\left(z^2 - \overline{z}^2\right) + z + \overline{z} = 0 \\
\Leftrightarrow & 2\mathrm{Re}\left(z\right)|z|^2 + i\left(z-\overline{z}\right)\left(z+\overline{z}\right) + 2\mathrm{Re}\left(z\right) = 0 \\
\Leftrightarrow & 2\mathrm{Re}\left(z\right)|z|^2 + i\left(2i\right)\mathrm{Im}(z)2\mathrm{Re}(z) + 2\mathrm{Re}\left(z\right) = 0 \\
\Leftrightarrow & \mathrm{Re}(z) = 0 \ \text{ OU } \ |z|^2 - 2\mathrm{Im}\left(z\right) + 1 = 0 \\
\Leftrightarrow & z \in i\mathbb{R} \ \text{ OU } \ |z|^2 - 2\mathrm{Im}\left(z\right) + 1 = 0.
\end{array}$$

Posons $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. Alors,

$$\begin{array}{rcl}
|z|^2 - 2\mathrm{Im}\left(z\right) + 1 = 0 & \Leftrightarrow & a^2 + b^2 - 2b + 1 = 0 \\
& \Leftrightarrow & a^2 + (b-1)^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow & a = 0 \ \text{ ET } \ b = 1 \\
& \Leftrightarrow & z = i.
\end{array}$$

Or par hypothèse, $z \neq i$. Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S} = i\mathbb{R} \setminus \{i\}\,.}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ Pour être un triangle rectangle isocèle en M, il faut notamment être rectangle en M. Donc par la question précédente, on sait déjà que $z \in i\mathbb{R} \setminus \{i\}$ i.e. il existe $b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que $z = ib$.

Méthode 1. On a alors les équivalences suivantes,

$$\begin{array}{rll}
& AMN \text{ isocèle rectangle en } M & \\
\Leftrightarrow & AM = MN & \\
\Leftrightarrow & |z_M - z_A| = |z_N - z_M| & \\
\Leftrightarrow & |z_M - z_A|^2 = |z_N - z_M|^2 & \text{car les modules sont positifs} \\
\Leftrightarrow & |ib - i|^2 = \left|(ib)^2 + ib + 1 - ib\right|^2 & \\
\Leftrightarrow & |i|^2 |b-1|^2 = \left|-b^2 + 1\right|^2 & \\
\Leftrightarrow & (b-1)^2 = \left(b^2 - 1\right)^2 & \text{car } b-1 \in \mathbb{R} \text{ et } b^2 - 1 \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow & (b-1)^2 = (b-1)^2 (b+1)^2 & \\
\Leftrightarrow & b - 1 = 0 \ \text{ OU } \ 1 = (b+1)^2 & \\
\Leftrightarrow & b = 1 \ \text{ OU } \ b+1 = 1 \ \text{ OU } \ b+1 = -1 & \\
\Leftrightarrow & b = 0 \ \text{ OU } \ b = -2 &
\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = 0 \ \text{ OU } \ z = -2i.$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0; -2i\}.}$$

Méthode 2. Pour que AMN soit isocèle rectangle, il faut et il suffit que N soit l'image de A par la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$. On obtient donc les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rll}
& AMN \text{ isocèle rectangle en } M & \\
\Leftrightarrow & z^2 + z + 1 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} (i - z) + z \ \text{ OU } \ z^2 + z + 1 = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} (i - z) + z & \\
\Leftrightarrow & -b^2 + ib + 1 = i(i - ib) + ib \ \text{ OU } \ -b^2 + ib + 1 = -i(i - ib) + ib & \\
\Leftrightarrow & -b^2 + ib + 1 = -1 + b + ib \ \text{ OU } \ -b^2 + ib + 1 = 1 - b + ib & \\
\Leftrightarrow & b^2 + b - 2 = 0 \ \text{ OU } \ b^2 - b = 0 & \\
\Leftrightarrow & (b-1)(b+2) = 0 \ \text{ OU } \ b(b-1) = 0 & \\
& \qquad \text{car 1 est une racine évidente de la première équation} & \\
\Leftrightarrow & b - 2 = 0 \ \text{ OU } b = 0 & \text{car } b \neq 1 \\
\Leftrightarrow & z = -2i \ \text{ OU } \ z = 0. &
\end{array}$$

Conclusion, on retrouve le même ensemble :

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0; -2i\}.}$$