1) Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{(n)}$: $u_n > 0$

Initialisation : si $n = 0$

$u_n > 0$ par définition

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons $P_{(n)}$ vrai

Montrons que $P_{(n+1)}$ l'est aussi

On a $u_n > 0 \iff e^{-u_n} u_n > 0$ car $e^{-u_n} > 0$

$\iff u_{n+1} > 0$

~~Donc~~ La propriété est initialisée à partir du rang $n = 0$ et reste vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ Oui

Comme $u_n > 0$ alors $(e^{-u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante OK

pas clair.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. De plus $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0 donc par le théorème de convergence monotone,

$\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente et converge vers } 0.}$????

2) $\boxed{\text{On ne peut pas en déduire la nature de } \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n}$ OK

3) On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n = \ln(u_n)$

$= \ln(e^{-u_{n-1}} u_{n-1})$

$= -u_{n-1} + v_{n-1}$ oui $\iff u_n = v_{n+1} - v_n$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k)$

On reconnait...

$= v_{n+1} - v_0$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = v_{n+1} - v_0}$

4) Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$

On a $w_{n+1} - w_n = \sum_{k=0}^{n+1} v_k - \sum_{k=0}^{n} v_k$

$= v_{n+2} - v_{n+1}$

$= \ln(u_{n+2}) - \ln(u_{n+1})$

$= \ln\left(\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}\right)$

à détailler

Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ~~dé~~croissante

De plus $w_n > 0$

Donc par le théorème de convergence monotone, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

Donc $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge.}}$

Exercice 2

1) Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$

AMN forment un triangle rectangle en M

$\Leftrightarrow \frac{i-z}{z^2+1} \in i\mathbb{C}$ Pourquoi ?

Posons $z = a+ib$ BEURK !

$\Leftrightarrow \frac{i-(a+ib)}{a^2-b^2+2abi+1} \in i\mathbb{C}$ A reprendre.

$\Leftrightarrow \frac{a+i(1-b)}{a^2-b^2+abi} \in i\mathbb{C}$

$\Leftrightarrow \frac{(a+i(1-b))(a^2-b^2-abi)}{(a^2-b^2)^2+a^2b^2} \in i\mathbb{C}$

$\Leftrightarrow \frac{a(a^2-b^2)+ab(1-b)+i((a^2-b^2)(1-b)-a^2b)}{(a^2-b^2)^2+a^2b^2} \in i\mathbb{C}$

$$\Leftrightarrow a(a^2 - b^2) + ab(1 - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 - ab^2 + ab - ab^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a(a^2 - b^2 + b - b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ a^2 - 2b^2 + b = 0 \end{array} \right.$$