

Correction Printemps 07

Probabilités / Equations différentielles

Solution de l'exercice 1

1. Notons X le résultat du dé et V l'évènement « obtenir une boule verte ». On cherche $\mathbb{P}(V)$. Puisque $(X = i)_{i \in \llbracket 1; 6 \rrbracket}$ forme un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(V) = \sum_{i=1}^6 \mathbb{P}(V \mid X = i) \mathbb{P}(X = i).$$

Puisque le dé est équilibré, $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; 6 \rrbracket)$ i.e. pour tout $i \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, $\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{6}$. D'autre part, pour $i \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, si $X = i$ est réalisé, l'urne contient i boules vertes et $6 - i$ boules rouges. Donc en effectuant un tirage uniforme parmi les boules : $\mathbb{P}(V \mid X = i) = \frac{i}{6}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(V) = \sum_{i=1}^6 \frac{i}{6} \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^6 i = \frac{1}{36} \frac{6 \times 7}{2} = \frac{7}{12}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(V) = \frac{7}{12}.$$

2. On cherche $\mathbb{P}(X = 6 \mid V)$. Par la question précédente, $\mathbb{P}(V) \neq 0$. Donc par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(X = 6 \mid V) = \frac{\mathbb{P}(V \mid X = 6) \mathbb{P}(X = 6)}{\mathbb{P}(V)}.$$

Par la question précédente, $\mathbb{P}(V) = \frac{7}{12}$ et nous avons vu que $\mathbb{P}(X = 6) = \frac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(V \mid X = 6) = 1$ (l'urne ne contient dans ce cas que des boules vertes). Donc

$$\mathbb{P}(X = 6 \mid V) = \frac{1/6}{7/12} = \frac{2}{7}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X = 6 \mid V) = \frac{2}{7}.$$

3. Au lieu de piocher une seule boule, on en pioche cinq sans remise. On garde toujours la variable X mais l'on note désormais V_i l'évènement « piocher une boule verte au tirage i » et W l'évènement « piocher 5 boules vertes ». On cherche donc $\mathbb{P}(W)$ et on observe que $W = V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5$. Puisque $(X = i)_{i \in \llbracket 1; 6 \rrbracket}$ forme un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(W) = \sum_{i=1}^6 \mathbb{P}(W \cap (X = i)).$$

On note que si $X \leq 4$, alors l'urne ne contiendra pas 5 boules vertes, il sera donc impossible de réaliser W . Donc $(X \leq 4)$ est incompatible avec W . Ainsi,

$$\mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = \mathbb{P}(W \cap (X = 5)) + \mathbb{P}(W \cap (X = 6)).$$

D'une part, si $X = 6$ alors, il n'y a que des boules vertes dans l'urne et donc W est automatiquement réalisé i.e. $(X = 6) \subseteq W$ et donc $W \cap (X = 6) = (X = 6)$. D'où

$$\mathbb{P}(W \cap (X = 6)) = \mathbb{P}(X = 6) = \frac{1}{6}.$$

D'autre part, par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W \cap (X = 5)) &= \mathbb{P}(V_5 \mid (X = 5) \cap V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4) \\ &\quad \mathbb{P}(V_4 \mid (X = 5) \cap V_1 \cap V_2 \cap V_3) \\ &\quad \mathbb{P}(V_3 \mid (X = 5) \cap V_1 \cap V_2) \\ &\quad \mathbb{P}(V_2 \mid (X = 5) \cap V_1) \mathbb{P}(V_1 \mid X = 5) \mathbb{P}(X = 5).\end{aligned}$$

On sait que $\mathbb{P}(X = 5) = \frac{1}{6}$. Puis, si $X = 5$, alors l'urne contient 5 boules vertes parmi 6 :

$$\mathbb{P}(V_1 \mid X = 5) = \frac{5}{6}.$$

De même si $(X = 5) \cap V_1$ est réalisé, on avait 5 boules vertes puis l'on en a retiré une. Donc il nous reste 4 boules vertes parmi 5 :

$$\mathbb{P}(V_2 \mid (X = 5) \cap V_1) = \frac{4}{5}.$$

De même, pour les autres probabilités :

$$\mathbb{P}(W \cap (X = 5)) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{36}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(W) = \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(W) = \frac{7}{36}}.$$

Solution de l'exercice 2 Soit Δ le discriminant de $X^2 + 2X + 3$. On a $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x + 3 \neq 0$. Ainsi, on note que les fonctions $a : x \mapsto -\frac{2x+1}{x^2+2x+3}$ et $b : x \mapsto 3x + 2$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc (E) admet des solutions. L'équation homogène associée à (E) est

$$(E_0) : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) - \frac{2x+1}{x^2+2x+3}y(x) = 0.$$

Puisque $a : x \mapsto -\frac{2x+1}{x^2+2x+3}$ est continue sur $\mathbb{R}$ elle admet des primitives sur cet intervalle dont

$$A : x \mapsto -\ln \left(\left| x^2 + 2x + 3 \right| \right) = -\ln (x^2 + 2x + 3).$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-A(x)} = e^{\ln(x^2+2x+3)} = x^2 + 2x + 3.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_0) est donné par

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{cc} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto C(x^2 + 2x + 3) \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{array}{cc} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 + 2x + 3 \end{array} \right).$$

Procédons maintenant à la méthode de variation de la constante. Posons

- $y_0 : x \mapsto x^2 + 2x + 3$,
- y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$,
- $\lambda = \frac{y}{y_0}$.

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_0(x) \neq 0$, on en déduit que λ est bien définie. De plus, y_0 est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et y aussi par hypothèse donc par quotient, λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $y = \lambda y_0$. Par suite, on a

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) - \frac{2x+1}{x^2+2x+3}y(x) = 3x+2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\lambda'(x)y_0(x) + \lambda(x)y_0'(x) - \frac{2x+1}{x^2+2x+3}\lambda(x)y_0(x)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathcal{S}_0} = 3x+2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x)y_0(x) = 3x+2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x) = \frac{3x+2}{y_0(x)} = \frac{3x+2}{x^2+2x+3} \quad \text{car } y_0(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = x^2 + 2x + 3$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x + 2$. Dès lors, on observe

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{3x+2}{x^2+2x+3} = \frac{3}{2} \frac{2x+2}{x^2+2x+3} - \frac{1}{x^2+2x+3} = \frac{3}{2} \frac{2x+2}{x^2+2x+3} - \frac{1}{(x+1)^2+2}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{3x+2}{x^2+2x+3}$ est bien continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$ dont l'une est donnée par

$$F : x \mapsto \frac{3}{2} \ln \left(|x^2 + 2x + 3| \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda(x) = \frac{3}{2} \ln \left(x^2 + 2x + 3 \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + C \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \left(\frac{3}{2} \ln \left(x^2 + 2x + 3 \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + C \right) (x^2 + 2x + 3). \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(\frac{3}{2} \ln \left(x^2 + 2x + 3 \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + C \right) (x^2 + 2x + 3) \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$