

Exercise Binlamps 02

Brerace 1:

Posons B l'événement "piocher une boule verte".
 R l'événement "piocher une boule rouge." ✓

$\frac{1}{6}$

X₁

$\frac{1}{6}$

X₂

$\frac{1}{6}$

X₃

$\frac{1}{6}$

X₄

$\frac{1}{6}$

X₅

$\frac{1}{6}$

X₆

B
R
B
R
B
R
B
R
B
R

an

1) On cherche la probabilité de piocher une boule verte. Il faut définir X .

Il faut définir X .

$\{X = k\}_{k \in [1;6]}$ forme un système complet d'événements. TB

$$P(B) = P(B|X_1) \times P(X_1) + P(B|X_2) \times P(X_2) + \dots + P(B|X_6) \times P(X_6)$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} \right)$$

(can $\times \sim u(\theta; \phi)$)

$$= \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36}$$

$$= \frac{21}{36} \checkmark = \frac{7}{12}$$

$\boxed{PCB} = \frac{7}{12}$ Bien!

2) Par la formule de Baryes: au

Van de formule de Bayes

$$P(\underline{x}_6|B) = \frac{P(B|\underline{x}_6) \times P(\underline{x}_6)}{P(B)} \quad \checkmark$$

$$= \frac{1 \times \frac{1}{6}}{\frac{7}{12}} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{12}{2}}{\frac{12}{42}} = \frac{2}{7}$$

$$IP(X_6|B) = \frac{2}{7}$$

direct (et plus simple)

3). On veut la probabilité d'avoir 5 boules vertes. $\checkmark$
 lorsque $X=k$ $k \in \{5, 6\}$ forme un système complet d'événements. $\checkmark$
 avec $k \leq 5$ Par la formule des probabilités totales :
 la probabilité est nulle car on se place dans le cas $k \geq 5$. $\checkmark$

$$IP(B=5) = IP(B=5|X=5) \times IP(X=5) + IP(B=5|X=6) \times IP(X=6) + 0$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{6} = \frac{7}{36}$$

Exact mais à justifier!

$$IP(B=5) = \frac{7}{36} \quad \checkmark \quad TB$$

Exercice 2:

Soit (E) : $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+3} \quad y(x) = 3x+2$ $\checkmark$

Solution homogène:

Posons (E_0) : $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+3} \quad y(x) = 0$ $\checkmark$

La fonction $x \mapsto \frac{2x+2}{x^2+2x+3}$ est continue sur $\mathbb{R}$ $\checkmark$

avec un dénominateur non nul et donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$ dont l'une est donnée par $x \mapsto -\ln(x^2+2x+3)$ $\checkmark$

$$G_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto C e^{+\ln(x^2+2x+3)} \mid C \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \quad \triangle!$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto C \frac{1}{x^2+2x+3} \mid C \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+3} \end{array} \right)$$

Cherchons la solution particulière

Méthode de variation de la constante:

Soit $a : x \mapsto \frac{2x+2}{x^2+2x+3}$ et $b : x \mapsto 3x+2$.

sont continues sur $\mathbb{R}$ donc (E) admet des solutions sur $\mathbb{R}$.

Soit λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda(x) y_0(x)$ avec $y_0(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

y solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x) y_0'(x) - \lambda(x) y_0(x) = 3x+2$$

$$y'(x) = \lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x) y_0'(x) \quad \checkmark$$

y solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - \frac{2x+2}{x^2+2x+3} y(x) = 3x+2$ oui!

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x) y_0'(x) - \frac{2x+2}{x^2+2x+3} \lambda(x) y_0(x) = 3x+2$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x) (y_0'(x) - \frac{2x+2}{x^2+2x+3} y_0(x)) = 3x+2$$

$\frac{2x+2}{x^2+2x+3} y_0(x) = 3x+2$
 $\frac{2x+2}{x^2+2x+3} = 0$ par la sold
équation homogène $\checkmark$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) y_0(x) = 3x+2 \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = \frac{3x+2}{y_0(x)} \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = \frac{3x+2}{1}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(x) = 9x^2 + 16x + 13 + C \quad \text{??}$$

L'ensemble des solutions est alors $y_p + y_0$:

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto C \frac{1}{x^2+2x+3} + 9x^2 + 16x + 13 + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$