Exo 2 :

$$U_n = \ln\left(1 + \sqrt{\frac{n+a}{n}} - n \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

① on pose $u = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ ✓

$$\arctan(u) \underset{u \to 0}{=} u - \frac{u^3}{3} + o(u^3) \text{ ✓}$$

donc

$$n \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{=} n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \text{ ✓}$$

$$= 1 - \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ ✓}$$

et on a :

$$\sqrt{\frac{n+a}{n}} = \left(\frac{n+a}{n}\right)^{1/2}$$

$$= \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{1/2} \text{ ✓}$$

$$= 1 + \frac{a}{2n} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2} \times \frac{a^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{a}{2n} - \frac{a^2}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ ouf}$$

donc

$$\sqrt{\frac{n+a}{n}} - n \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = -\left(\cancel{1} - \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \cancel{1} + \frac{a}{2n} - \frac{a^2}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{a}{2n} + \frac{8 - 3a^2}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{u} \text{ ✓}$$

$$U_n = \ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

on pose $u = \frac{a}{2n} + \frac{8 - 3a^2}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ oui !

$$u^2 = \left(\frac{a}{2n} + \frac{8 - 3a^2}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\frac{a}{2n} + \frac{8 - 3a^2}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \frac{a^2}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ ✓}$$

$$o(u^2) = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ ✓}$$

. donc $U_n = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$

$$= \frac{a}{2n} + \frac{8-3a^2}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$- \frac{a^2}{2 \times 4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad ✓$$

$$= \frac{a}{2n} + \frac{8-3a^2-3a^2}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{a}{2n} + \frac{8-6a^2}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad ✓$$

d'où $U_n \underset{n\to\infty}{=} \frac{a}{2n} + \frac{4-3a^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ✓

$$\begin{cases} U_n \sim \frac{a}{2n} & \text{si } a>0 \\ U_n = \frac{4}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{3n^2} & \text{si } a=0 \end{cases}$$

TB!

2) On a : $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a}{2n}$ $a>0$

on reconnait série harmonique avec $\alpha = 1$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{2n} > 0$ ✓

Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs : $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} U_n \text{ diverge pour } a>0}$ TB

et on a : $U_n \sim \frac{1}{3n^2}$ $a=0$

on reconnait série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$

de plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{3n^2} > 0$

Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs : $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} U_n \text{ converge pour } a=0}$ TB