Correction Printemps 08
Intégration / Analyse asymptotique

Solution de l'exercice 1 Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction exponentielle est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\exp^{(k)}(t) = \exp(t).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction exponentielle étant donc notamment $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[0;x]$ (ou $[x;0]$) par l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k\right| \leqslant \sup_{t\in[0;x]} \left|\exp^{(n+1)}(t)\right| \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ainsi,

$$\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^0}{k!} x^k\right| \leqslant \sup_{t\in[0;x]} \left|\mathrm{e}^t\right| \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Posons $M_x = \sup_{t\in[0;x]} \left|\mathrm{e}^t\right|$. Par croissance de la fonction exponentielle on peut noter que

$$M_x = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^x \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Le réel M_x dépend donc de x mais pas de n. On a alors,

$$\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant M_x \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Or par croissance comparée, $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (y compris si $|x| > 1$). Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| = 0.$$

Autrement dit, $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!} \text{ converge}}$ et sa somme totale est donnée par

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x.}$$

Solution de l'exercice 2

1. On a les égalités asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{n+a}{n}} &\underset{n\to+\infty}{=} \left(1+\frac{a}{n}\right)^{1/2} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{a}{2n} + \frac{(1/2)(-1/2)}{2}\frac{a^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{a}{2n} - \frac{a^2}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
n\arctan\left(\frac{1}{n}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Par différence,

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{n+a}{n}}-n\arctan\left(\frac{1}{n}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{a}{2n}-\frac{a^2}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-1+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{2n}+\frac{8-3a^2}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Posons $u \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{2n}+\frac{8-3a^2}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On a les points suivantes :

- $u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Puis,

$$u^2 \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{a}{2n}+\frac{8-3a^2}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\frac{a}{2n}+\frac{8-3a^2}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a^2}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

- Enfin,

$$o\left(u^2\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{a^2}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or $\ln(1+u) \underset{u\to0}{=} u-\frac{u^2}{2}+o\left(u^2\right)$. Donc

$$\begin{aligned}u_n &\underset{n\to+\infty}{=} u-\frac{u^2}{2}+o\left(u^2\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \begin{array}{lll}\frac{a}{2n} & +\frac{8-3a^2}{24n^2} & +o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ & -\frac{a^2}{8n^2} & +o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ & & +o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{array}\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{2n}+\frac{8-6a^2}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{2n}+\frac{4-3a^2}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Premier cas, si $a>0$. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a}{2n}$.

Second cas, si $a=0$. Alors, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{4}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n^2}$.

Conclusion,

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \begin{cases}\frac{a}{2n} & \text{si } a>0\\ \frac{1}{3n^2} & \text{si } a=0.\end{cases}}$$

2. Par la question précédente, si $a>0$, alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a}{2n}.$$

De plus pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{a}{2n}>0$. Enfin, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{a}{2n}$ diverge en tant que série harmonique ou de Riemann d'exposant $\alpha=1$. Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ diverge.}$$

Second cas, si $a=0$, alors, toujours par la question précédente,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n^2}.$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{3n^2} > 0$. Enfin, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{3n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \begin{cases} \text{diverge} & \text{si } a > 0 \\ \text{converge} & \text{si } a = 0. \end{cases}}$$