Brigitte
Badji
PTSI

Intégration / Analyse asymptotique

Exercice 1

Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : t \to e^t$ est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ ✓
donc sur $[0;x]$ ✓. Par l'inégalité de Taylor Lagrange :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \sup_{z \in [0;x]} \left| f^{(n+1)}(z) \right| \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$ oui !

Or $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(t) = e^t$ ✓

$f^{(k)}(0) = 1$ ✓ et $t \in [0;x]$ $0 < 1 \leq e^t \leq e^x$, par croissance de la fonction exponentielle. Que si $x \geq 0$

Donc $\forall z \in [0;x]$, $|f^{(n+1)}(z)| \leq \max(e^x, 1) = M_x$

$$\text{donc } \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \cancel{e^x} M_x \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$-\cancel{e^x} M_x \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq \cancel{e^x} M_x \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$e^x \left(\frac{-x^{n+1}}{(n+1)!} - 1 \right) \leq -\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq e^x \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - 1 \right)$$

$$e^x \left(\frac{-x^{n+1}}{(n+1)!} + 1 \right) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq e^x \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + 1 \right)$$

Corrigé par une autre rédaction

$$\lim_{n \to +\infty} e^x \Big(\underbrace{\frac{-x^{n+1}}{(n+1)!}}_{0} + 1 \Big) = e^x \qquad \lim_{n \to +\infty} e^x \Big(\underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{0} + 1 \Big) = e^x$$

Par passage à la limite on a :

$$e^x \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \leq e^x$$

$\boxed{\text{donc la série exponentielle converge vers } e^x}$ OK

Exercice 2

1) Équivalent de u_n

on a $\ln\left(1+\sqrt{\frac{n+a}{n}} - n\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right) \geq 0$

1er cas : $a = 0$

$u_n = \ln\left(1+\sqrt{\frac{n}{n}} - n\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ ✓

$= \ln\left(1+1-n\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(2-n\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ ✓

$\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ ✓ $n\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ✓

$n\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \cancel{-\frac{1}{3n^2}}$ $u_n \sim \ln\left(2-1+\frac{1}{3n^2}\right)$

Pas de somme et pas de composée d'équivalents !!

$u_n \sim \ln\left(1+\frac{1}{3n^2}\right)$

$\ln\left(1+\frac{1}{3n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{3n^2}$

$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n^2}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \frac{1}{3n^2} > 0$

Faux ! cf anti-prop III.3 chap 18

$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \sim \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{3n^2}$ or $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{3n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$ ✓. Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs

$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge}}$

2ème cas : $a > 0$

$u_n = \ln\left(1+\sqrt{\frac{n+a}{n}} - n\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$\sqrt{\frac{n+a}{n}} = \sqrt{1+\frac{a}{n}} = \left(1+\frac{a}{n}\right)^{1/2}$ ✓

$\left(1+\frac{a}{n}\right)^{1/2} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{a}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ ✓

$= 1 + \frac{a}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Brigitte Badja PTSI

$\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ $\quad n\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)$ ✓

$\sqrt{\frac{n+a}{n}} - n\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{a}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)$ ✓

$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ ✓

$\sqrt{\frac{n+a}{n}} - n\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a}{2n}$ FAUX !

$u_n \sim \ln\left(1 + \frac{a}{2n}\right) = \ln\left(1 + \frac{a}{2n}\right)$

$\ln\left(1+\frac{a}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{a}{2n}$

$\boxed{u_n \sim \frac{a}{2n}} \Rightarrow \cancel{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \sim \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a}{2n}}$

or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a}{2n}$ diverge en tant que série harmonique ✓

~~dans~~ donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs

$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ diverge}}$ ✓