Exercice 1 :

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

f est un projecteur $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ linéaire} \\ f \circ f = f \end{cases}$ ✓

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A$ ✓

Or $A = \text{mat} \ldots$

Donc $f^2 = f$ ✓, donc $\boxed{f \text{ est un projecteur}}$ ✓

Exercice 2 :

1) Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\ln(|x|)} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

Soit $x \in \mathbb{R}$

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(|x|) \neq 0 & ✓ \\ |x| > 0 & ✓ \end{cases}$ et $f(0)$ existe

Donc $\boxed{f \text{ définie sur } \mathbb{R}}$ OK

2) Soit $x \in \mathbb{R}$ Domaine centré en 0 ✓

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{\ln(|-x|)} \cos\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ ✓ $= \dfrac{x^2}{\ln(|x|)} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ car la fonction cosinus est paire ✓

$= f(x)$ ✓

$f(-0) = f(0)$

Donc $\boxed{f \text{ est paire}}$ ✓

3) f continue en 0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x)$ existe et vaut $f(0)$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x^2}{\ln(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= 0 = f(0)$$

Non justifié

Donc $\boxed{f \text{ continue en } 0}$

4) f dérivable en $0 \iff \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ existe   oui

$\iff \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x}{\ln(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ existe   oui !

Or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x}{\ln(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ Pourquoi ?

Donc $\boxed{f \text{ dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0}$

f est $\mathcal{C}^1$ en $0 \iff \begin{cases} f \text{ ~~continue~~ dérivable en } 0 \\ f' \text{ continue en } 0 \end{cases}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \; f'(x) = \frac{x \, 2\ln(|x|) - x}{\ln^2(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x^2}{\ln(|x|)} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

?

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{2\ln(|x|) - x}{\ln^2(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \ln^2(|x|) \gg \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} 2\ln(|x$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2\ln(|x|)} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Donc f' continue en 0

Ce n'est pas ce que tu utilises ici, ici tu passes par la définition.

Donc d'après le ~~théorème de prolongement~~ $\mathcal{C}^1$,

$\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ en } 0}$