

Correction Printemps 09

Représentation matricielle / Continuité-dérivabilité

Solution de l'exercice 1

1. Par définition, f est linéaire. De plus,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $A^2 = A$. Ainsi, $f^2 = f$. Conclusion,

$$f \text{ est un projecteur de } \mathbb{R}_2[X].$$

2. Par la question précédente, on en déduit directement que

$$\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = \mathbb{R}_2[X].$$

3. Par ce qui précède, $(P_1, P_2) = (X + 2, X^2 + 2X + 1)$ est une base de $\text{Im}(f)$. D'autre part, $(P_3) = (X^2 + 3X + 3)$ est une base de $\text{Ker}(f)$. Donc par le théorème de la base adaptée,

$$\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3) = (X + 2, X^2 + 2X + 1, X^2 + 3X + 3) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].$$

Puisque f est un projecteur, on sait que $\text{Im}(f) = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid f(P) = P\}$. Donc,

$$f(P_1) = P_1 \quad \text{et} \quad f(P_2) = P_2.$$

Enfin, puisque $P_3 \in \text{Ker}(f)$, $f(P_3) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. Conclusion,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 2

1. Pour tout $x \neq 0$, $|x| > 0$ et donc $\ln(|x|)$ existe. Pour $x \neq 0$, $\frac{1}{x}$ et donc $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ existent aussi. Enfin pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{1}{\ln(|x|)} \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(|x|) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \notin \{-1; 1\}.$$

De plus $f(0)$ est bien définie. Conclusion,

$$\text{l'ensemble de définition de } f \text{ est } \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}.$$

Notons $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ cet ensemble.

2. Montrons que f est une fonction paire.

- L'ensemble $\mathcal{D}$ de définition de f est centré en 0.

- Pour tout $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$, on a, par parité de $|\cdot|$ et de $\cos$,

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{\ln(|-x|)} \cos\left(\frac{1}{-x}\right) = \frac{x^2}{\ln(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = f(x).$$

De plus si $x = 0$,

$$f(-0) = f(0).$$

Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est paire.}}$$

3. Pour tout $x \in]0; 1[$, on a

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{\ln(x)} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$. Donc pour tout $x > 0$,

$$|f(x)| \leq \frac{x^2}{\ln(x)}.$$

Or

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0.$$

Donc (pas de forme indéterminée inutile de sortir ses gros sabots de croissance comparée),

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2}{\ln(x)} = 0.$$

Donc par le théorème d'encadrement $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0$ i.e. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Puis par parité,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0).$$

Autrement dit

$$\boxed{f \text{ est continue en } 0.}$$

4. Appliquons le théorème de prolongement de fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

- La fonction f est définie et continue sur $] -1; 1[$.
- La fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $] -1; 1[\setminus \{0\}$ en tant que produit et composée de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur cet ensemble. De plus pour tout $x \in] -1; 1[\setminus \{0\}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2}{\ln(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)' \\ &= \frac{2x}{\ln(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2 (\ln(|x|))'}{\ln^2(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{\ln(|x|)} \left(\frac{1}{x}\right)' \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{2x}{\ln(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2 \frac{1}{x}}{\ln^2(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x^2}{\ln(|x|)} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{2x \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(|x|)} - \frac{x \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln^2(|x|)} + \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(|x|)} \end{aligned}$$

Donc par l'inégalité triangulaire et le fait que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\cos(t)| \leq 1$ et $|\sin(t)| \leq 1$, on obtient que pour tout $x \in]-1; 1[\setminus \{0\}$

$$|f'(x)| \leq \frac{2|x|}{|\ln(|x|)|} + \frac{|x|}{\ln^2(|x|)} + \frac{1}{|\ln(|x|)|}$$

Or (toujours pas de croissance comparée, non non)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{2|x|}{|\ln(|x|)|} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{|x|}{\ln^2(|x|)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{1}{|\ln(|x|)|} = 0.$$

Donc par encadrement on obtient

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} |f'(x)| = 0.$$

Donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = 0.$$

De ces deux points et du théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, on en déduit que f est $\mathcal{C}^1$ en 0 et

$$f'(0) = 0.$$