Correction Printemps 10
Probabilités / Polynômes

Solution de l'exercice 1

1. On cherche $\mathbb{P}(X = 1, Y = 2, Z = 3)$. Par la formule des probabilités composées,
$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 2, Z = 3) = \mathbb{P}(X = 1)\,\mathbb{P}(Y = 2X = 1)\,\mathbb{P}(Z = 3 \mid Y = 2, X = 1)\,.$$
On suppose le tirage de la première boule uniforme : $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$. Dès lors,
$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{n}.$$
Sachant que le numéro 1 est sorti, il reste alors $n-1$ boules dont le numéro 2. Dès lors
$$\mathbb{P}(Y = 2X = 1) = \frac{1}{n-1}.$$
Enfin, sachant que les numéros 1 et 2 sont sortis, il ne reste plus que $n-2$ boules dont le numéro 3. Donc
$$\mathbb{P}(Z = 3 \mid Y = 2, X = 1) = \frac{1}{n-2}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{P}(X = 1, Y = 2, Z = 3) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}.}$$

2. Calculons $\mathbb{P}(Y \geqslant X + 2)$. Puisque $X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$, on sait que $(X = k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ forme un système complet d'évènements (incompatibles). Par la formule des probabilités totales,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \geqslant X + 2) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y \geqslant X + 2 \mid X = k)\,\mathbb{P}(X = k)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y \geqslant X + 2 \mid X = k) \qquad \text{car } X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y \geqslant k + 2 \mid X = k)\,.\end{aligned}$$
Or si $X = k$, alors il reste les numéros 1, 2, ..., $k-1$, $k+1$, ..., n. Donc $\mathbb{P}(Y \geqslant k + 2 \mid X = k) = \frac{n-(k+2)+1}{n-1} = \frac{n-k-1}{n-1}$ si $k \leqslant n-1$ et $\mathbb{P}(Y \geqslant k + 2 \mid X = k) = 0$ si $k = n$. D'où
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \geqslant X + 1) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k-1}{n-1} + 0\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2} \frac{k}{n-1} \qquad \text{en posant } \tilde{k} = n-k-1\\ &= \frac{1}{n(n-1)}\frac{(n-2)(n-1)}{2}\\ &= \frac{n-2}{2n}.\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{P}(Y \geqslant X + 1) = \frac{n-2}{2n}.}$$

Solution de l'exercice 2

1. *Méthode 1.* On rappelle que $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$. Donc par factorisation par l'angle moitié,
$$1 + j = 1 + \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} \left(\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}.$$
Méthode 2. On rappelle que $1 + j + j^2 = 0$ donc $1 + j = -j^2 = -\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$. Attention à cause du moins devant, ce n'est pas une forme polaire. On a plutôt,
$$1 + j = \mathrm{e}^{i\pi}\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}.$$
Conclusion,
$$\boxed{1 + j = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}}.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a les équivalences suivantes :
$$j \text{ est une racine de } \left(1 + X^4\right)^n - X^n \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 + j^4\right)^n - j^n \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 + j^4\right)^n = j^n.$$
Or, puisque j est une racine troisième de l'unité, $j^4 = j^3 \times j = j$. Donc
$$j \text{ est une racine de } \left(1 + X^4\right)^n - X^n \quad \Leftrightarrow \quad (1 + j)^n = j^n.$$
Si $n = 0$ alors j est bien une racine de $(1 + X^4)^n - X^n = 1 - 1 = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Supposons maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,
$$\begin{aligned}
& j \text{ est une racine de } \left(1 + X^4\right)^n - X^n \\
\Leftrightarrow\quad & \exists k \in [\![0\,;\,n-1]\!], \quad 1 + j = j\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists k \in [\![0\,;\,n-1]\!], \quad \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists k \in [\![0\,;\,n-1]\!], \quad \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists k \in [\![0\,;\,n-1]\!], \quad \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{3}} = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists k \in [\![0\,;\,n-1]\!], \quad \frac{5\pi}{3} = \frac{2k\pi}{n} \qquad \text{car } \frac{5\pi}{3} \in [0\,;\,2\pi[\text{ et } \frac{2k\pi}{n} \in [0\,;\,2\pi[\\
\Leftrightarrow\quad & \exists k \in [\![0\,;\,n-1]\!], \quad 5n = 6k.
\end{aligned}$$
Donc 6 divise $5n$, or 6 et 5 sont premiers entre eux donc par le lemme de Gauss, 6 divise n. Réciproquement, si 6 divise n, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ (car $n \neq 0$) tel que $n = 6p$. Alors $5n = 30p = 6k \Leftrightarrow k = 5p \in [\![0\,;\,6p]\!]$.
On remarque que si $n = 0$ alors cette condition est encore vraie. Conclusion,
$$\boxed{j \text{ est une racine de } \left(1 + X^4\right)^n - X^n \quad \Leftrightarrow \quad n \text{ est divisible par } 6.}$$
3. Supposons que 6 divise n. Alors par la question précédente, j est une racine de $P = (1 + X^4)^n - X^n$. Or P est à coefficients réels donc $\overline{j} = j^2$ est aussi une racine de P. Puisque $j^2 \neq j$, on en déduit que $\boxed{(X - j)(X + j) = X^2 + X + 1 \text{ divise } P \text{ dans } \mathbb{C}[X]}$ *NB : Par la question précédente, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que*
$$P = Q\left(X^2 + X + 1\right).$$
On note alors par passage au conjugué que (en posant pour $\overline{P}$ le polynôme P dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de P sans toucher aux X^k !)
$$\overline{P} = \overline{Q(X^2 + X + 1)} \quad \Leftrightarrow \quad P = \overline{Q}\left(X^2 + X + 1\right) \qquad \textit{car } P \in \mathbb{R}[X].$$

Donc par unicité de la division euclidienne (ici le reste est nul mais c'est toujours une division euclidienne), on en déduit que $\overline{Q} = Q$. *Notons* $Q = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, *où* $d = \deg(Q)$. *Alors*

$$\sum_{k=0}^{d} \overline{a_k} X^k = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k.$$

Donc par unicité des coefficients d'un polynôme, pour tout $k \in [\![0\,;d]\!]$, $a_k = \overline{a_k}$ *i.e.* $a_k \in \mathbb{R}$. *D'où* $Q \in \mathbb{R}[X]$. *D'où,*

$$P = Q\left(X^2 + X + 1\right), \qquad Q \in \mathbb{R}[X].$$

Conclusion, $\boxed{X^2 + X + 1 \text{ divise } P \text{ dans } \mathbb{R}[X]}$.