Exemples d'exercices corrigés

I Théorème sur les équivalents

Exercice 1. Déterminer la nature puis la somme totale de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2-n}$.

Solution. Posons pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \frac{1}{n^2-n}$. On a les points suivants :

- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$,
- $\forall n \geqslant 1,\ \frac{1}{n^2} \geqslant 0$,
- $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$.

Conclusion, par le théorème des équivalents des séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2-n} \text{ converge.}}$$

De plus, par le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\},\quad \frac{1}{x^2-x} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x}.$$

Avec,

$$a = \lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} (x-1)\frac{1}{x^2-x} = 1, b \qquad = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x\frac{1}{x^2-x} = -1.$$

Ainsi,

$$\forall n \geqslant 2,\quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n} \qquad \text{car on reconnait une somme télescopique.}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-n} = 1.}$$

II Théorème de comparaison

Exercice 2. Soit $r \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{r^n}{n!}$ converge.

Solution. Utilisons la règle du n^2. Soit $r \in \mathbb{R}_+$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \frac{r^n}{n!}$. On a

$$n^2 u_n = n^2\frac{r^n}{n!} = \frac{n}{n-1} r^2 \frac{r^{n-2}}{(n-2)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times r^2 \times 0 = 0, \qquad \text{par croissance comparée.}$$

Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0,\quad 0 \underset{\text{car } r\geqslant 0}{\underset{\uparrow}{\leqslant}} n^2 u_n \leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad \forall n \geqslant n_0,\quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

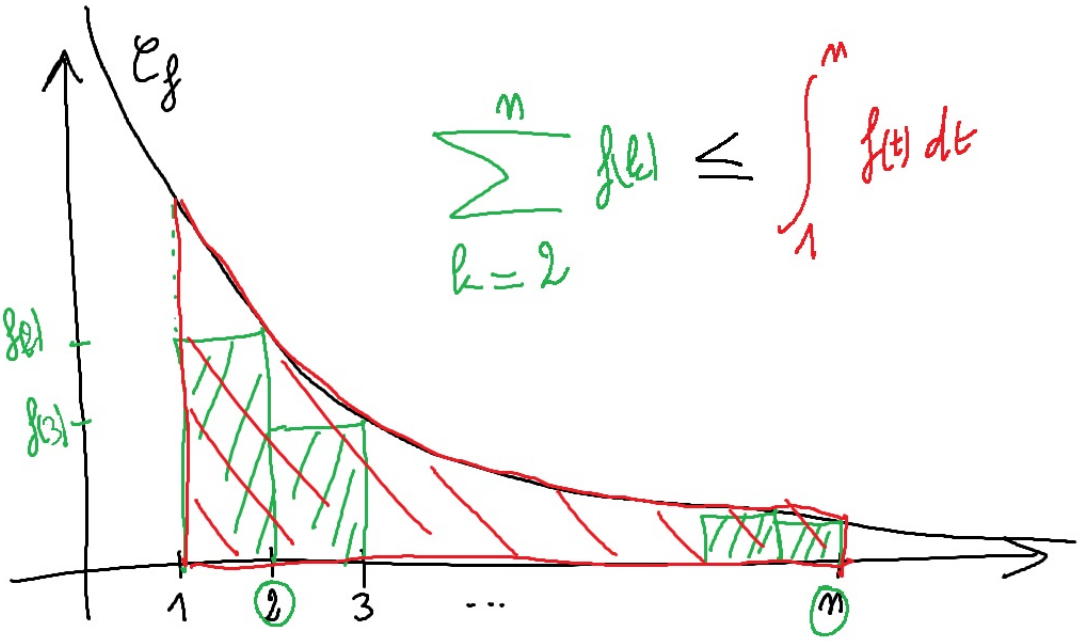
Or $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 0$. Conclusion, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{r^n}{n!} \text{ converge.}}$$

III Théorème d'encadrement série-intégrale

Exercice 3. Soit $\alpha > 1$. Démontrer le théorème de Riemann : la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge puis déterminer un équivalent du reste d'ordre n lorsque $n \to +\infty$.

Solution. Soit $\alpha > 1$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. La fonction f est continue sur $]0;+\infty[$ et puisque $\alpha > 0$, la fonction f est décroissante sur $]0;+\infty[$. Donc par le théorème de comparaison série-intégrale (faire un dessin !)



Pour tout $n \geqslant 2$,

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) = 1 + \sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant 1 + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\begin{aligned}\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{t=1}^{t=n} \qquad \text{car } \alpha \neq 1 \\ &= \left[-\frac{1}{(\alpha-1)\,t^{\alpha-1}}\right]_{t=1}^{t=n} \\ &= \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}.\end{aligned}$$

Or $\alpha - 1 > 0$ donc $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} > 0$ et ainsi,

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\alpha-1}.$$

D'où, pour tout $n \geqslant 2$,

$$0 \leqslant S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1} \quad \to \text{ indépendant de } n.$$

Ce qui est encore vraie pour $n = 1$. Donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée. Or la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \sum_{k=1}^{n} f(k) = f(n+1) = \frac{1}{(n+1)^\alpha} > 0.$$

Donc boum ! par le théorème de convergence monotone, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge i.e.

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge pour } \alpha > 1.}$$

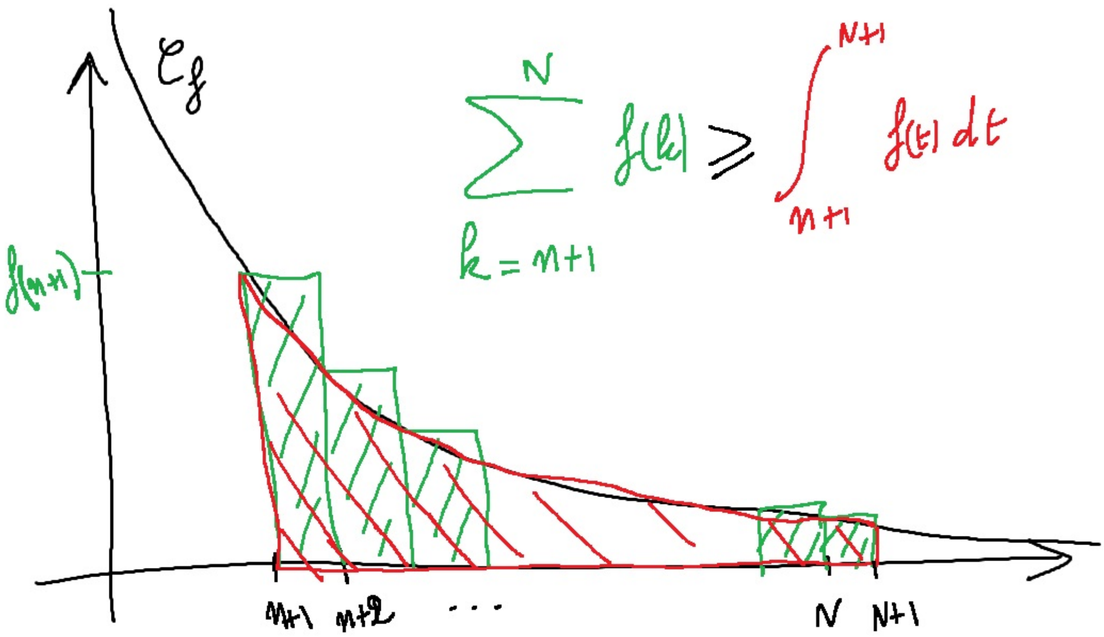
Déterminons un équivalent du reste d'ordre n lorsque $n \to +\infty$. Puisque la série converge le reste d'ordre n existe, notons-le R_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $N \in \mathbb{N}$, $N > n+1$. De même que précédemment, par comparaison série-intégrale, on a d'une part,

$$\sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leqslant \int_n^N f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)\,N^{\alpha-1}}.$$

D'autre part, toujours par comparaison série-intégrale,



$$\sum_{k=n+1}^{N} f(k) \geqslant \int_{n+1}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(\alpha-1)\,(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)\,(N+1)^{\alpha-1}}.$$

Ainsi, pour tout $N > n$, on a

$$\frac{1}{(\alpha-1)\,(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)\,(N+1)^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)\,N^{\alpha-1}}.$$

Donc par passage à la limite quand $N \to +\infty$,

$$\frac{1}{(\alpha-1)\,(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}.$$

Or $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. Donc par passage à la puissance $1-\alpha$,

$$\frac{1}{(\alpha-1)\,(n+1)^{\alpha-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}.$$

Conclusion, par le théorème d'encadrement pour les équivalents, on conclut que

$$\boxed{R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}.}$$

IV Convergence absolue

Définition IV.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ **converge absolument** ou encore que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est **sommable** si et seulement si la série des valeurs absolues ou des modules $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge.

Proposition IV.2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Exercice 4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ converge.

Solution. Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{z^n}{n!}$ et $r = |z|$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| = \left|\frac{z^n}{n!}\right| = \frac{|z|^n}{n!} = \frac{r^n}{n!}.$$

Par l'exercice précédent, on sait que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{r^n}{n!}$ converge. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge. Autrement dit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!} \text{ converge.}}$$