TD1
Logique et raisonnement

Eléments de logique

Exercice 1 Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont équivalentes ?

1. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$.
2. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.
3. $(P \text{ ET } Q) \Rightarrow R$.
4. $(P \Rightarrow R) \text{ ET } (Q \Rightarrow R)$.

Indication : dresser la table de vérité des différentes assertions.

Exercice 2 Soient P et Q deux assertions. La proposition suivante : $(P \text{ ET } Q) \Rightarrow (non(P) \text{ OU } Q)$ est-elle vraie ?

Exercice 3 Soient P, Q, R et S quatre assertions. Ecrire la négation de $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow S)$.

Exercice 4 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et P, Q et R les assertions suivantes :

$$\begin{aligned} P: &\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0, \\ Q: &\quad \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0, \\ R: &\quad (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0) \text{ OU } (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0). \end{aligned}$$

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont exactes ?

1. $P \Rightarrow Q$
2. $Q \Rightarrow P$
3. $Q \Rightarrow R$
4. $non(R) \Rightarrow Q$
5. $non(Q) \Rightarrow non(P)$
6. $non(P) \Rightarrow non(R)$

Lorsque l'affirmation est fausse, en donner un contre-exemple.

Exercice 5 Ecrire les propositions suivantes et leurs négations à l'aide de quantificateurs et dire lesquelles sont vraies.

1. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
2. Il existe un entier multiple de tous les autres.
3. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
4. Certains réels sont supérieurs à leur carré.
5. Etant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe.

Exercice 6 Déterminer toutes les propositions l'on peut obtenir en permutant l'ordre des quantificateurs avec leur variable et préciser leur véracité.

$$1) \qquad \exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*, \quad z = xy.$$

Exercice 7 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. Enoncer en français les assertions suivantes et écrire avec des quantificateurs leurs négations.

1. $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = C$.
2. $\forall x \in I,\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
3. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) = y$.
4. $\forall (x, y) \in I^2,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
5. $\forall x \in I,\ \ f(x) > 0 \Rightarrow x \neq 0$.

Exercice 8 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. Ecrire avec des quantificateurs les phrases suivantes puis les nier.

1. La fonction f s'annule sur I.
2. La fonction f est la fonction nulle sur I.
3. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur sur I.
4. La fonction f admet un minimum sur I.
5. La fonction f prend des valeurs arbitrairement grandes sur I.

Exercice 9 Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et écrire leurs négations.

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 > x$.

Exercice 10 Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dans chacun des cas suivants dire si l'assertion est vraie ou fausse et la nier.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \leqslant N$.
2. $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall N \in \mathbb{N},\ n \leqslant N$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$.
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$.

Exercice 11 Préciser la validité des énoncés suivants puis les nier.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ m$ divise n.
2. $\exists m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m$ divise n.
3. $\exists a \in \mathbb{R}^*,\ \forall \varepsilon > 0,\ |a| \leqslant \varepsilon$.
4. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R}^*,\ |a| \leqslant \varepsilon$.
5. $\forall M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ 2^n > M$.
6. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y < x$.
7. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x + 1 \neq 0 \text{ OU } x + 2 \neq 0)$.

Méthodes et raisonnements

Exercice 12 Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Démontrer que $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
2. En déduire que $\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leqslant \sqrt{|a-b|}$.

Exercice 13 Démontrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0\right) \Rightarrow (\alpha = \beta = 0).$$

Exercice 14 Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $xy \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$.

Exercice 15 Démontrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geqslant 0$.

Exercice 16 Soient $a_1, \dots, a_9$ neuf entiers naturels tels que $a_1 + \cdots + a_9 = 90$. Démontrer qu'il existe trois de ces nombres dont la somme est supérieure ou égale à 30.

Exercice 17 Démontrer que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

Exercice 18 Soit x un irrationnel positif. Démontrer que $\sqrt{x}$ est irrationnel.

Exercice 19 Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = P(x)$.

Exercice 20 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair.

Exercice 21 Montrer que lorsque qu'un réel peut s'écrire de la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}$, alors l'écriture est unique.

Exercice 22 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaires tel que $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ soit paire.

Exercice 23 Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \quad f(n+m) = f(n) + f(m).$$

Exercice 24 Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Exercice 25 Déterminer tous les réels x strictement positifs vérifiant l'équation $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.

Exercice 26 Soient s et p deux réels. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe deux réels dont la somme vaut s et le produit vaut p.

Exercice 27 On cherche l'ensemble des isométries de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(y) - f(x)| = |y - x|$.

1. **Analyse.** Soit f une isométrie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ \delta(x) = f(x) - f(0)$.
   (a) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\delta(y)\delta(x) = yx$.
   (b) En déduire la forme de f.
2. **Synthèse.** Conclure.

Exercice 28 Soit $q \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$...), démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1, \\ n+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 29 Démontrer les formules suivantes :

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $1 + 8 + 27 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 30 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$.

Exercice 31 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 1 + u_1 + \cdots + u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 32 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} \cdots + \frac{u_n}{n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant n$.

Exercice 33 Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 34 On considère la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(n-1)$.