TD10
Calculs réels

Exercice 1 Soit $a \in \mathbb{R}$ dont on précisera à chaque fois les valeurs possibles pour que les expressions soient bien définies. Simplifier les expressions suivantes.

1. $A = \sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2}$.
2. $B = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{18}}$.
3. $C = \sqrt{a+1-2\sqrt{a}} + \sqrt{a+1+2\sqrt{a}}$.
4. $D = \sqrt{(a+1)^2 - 4a} + \sqrt{(a-1)^2 + 4a}$.
5. $E = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$.
6. $F = \sqrt{9-4\sqrt{5}} + \sqrt{9+4\sqrt{5}}$.
7. $G = \sqrt{1+2017\sqrt{1+2018\times 2020}}$ *Indication : poser* $X = 2019$.
8. $H = \left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt[3]{9-5\sqrt{3}} - \left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt[3]{9+5\sqrt{3}}$.

Exercice 2 Pour chaque équation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$.
2. $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$.
3. $(x-1)(x+2)(x+3) = (x+4)(x-2)(x+1)$.
4. $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = 0$.
5. $6x^4 - x^2 - 1 = 0$.
6. $6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0$.
7. $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$.
8. $x^6 + \sqrt{2}x^3 - \sqrt{3}x^3 - \sqrt{6} = 0$.
9. $\mathrm{e}^{2x} - 5\,\mathrm{e}^{x} + 6 = 0$.
10. $\mathrm{e}^{2x} + 5\,\mathrm{e}^{x} + 6 = 0$.
11. $\mathrm{e}^{3x} - 2\,\mathrm{e}^{2x} - 5\,\mathrm{e}^{x} + 6 = 0$.
12. $\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 = 0$.
13. $\ln^2(x) - 2\ln(x) + 3 = 0$.
14. $4\ln^2(x) + 8\ln(x) + 3 = 0$.

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants.

1. $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x-y=-3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y+3z=-2 \\ -x+y+z=-1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x-y+2z=2 \\ x+4y+z=10 \end{cases}$
4. $\begin{cases} -x+4y-5z=7 \\ 3x-5y+3z=-1 \\ x+3y-7z=2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x-y+2z=2 \\ 3x-y+z=3 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+3z=2 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$(S_1)\ \begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 3x-y-2z=0 \\ x+y-z=-2 \\ x+2y+z=1 \end{cases}$ $(S_2)\ \begin{cases} 2x+y+z+t=1 \\ x+2y+3z+4t=2 \\ 3x-y-3z+2t=5 \\ 5y+9z-t=-6 \end{cases}$

$(S_3)\ \begin{cases} x-y+z+t=5 \\ 2x+3y+4z+5t=8 \\ 3x+y-z+t=7 \end{cases}$ $(S_4)\ \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y-z=0 \\ 3x+y+2z=0 \end{cases}$

$(S_5)\ \begin{cases} 2x+5y-8z=8 \\ 4x+3y-9z=9 \\ 2x+3y-5z=7 \\ x+8y-7z=12 \end{cases}$ $(S_6)\ \begin{cases} x+y=1 \\ y+z=0 \\ x-y=1 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$

$(S_7)\ \begin{cases} 2x+2y-z+t=4 \\ 4x+3y-z+2t=6 \\ 8x+5y-3z+4t=12 \\ 3x+3y-2z+2t=6 \end{cases}$ $(S_8)\ \begin{cases} 2x+7y+3z+t=5 \\ x+3y+5z-2t=3 \\ x+5y-9z+8t=1 \\ 5x+18y+4z+5t=12 \end{cases}$

$(S_9)\ \begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y+2z-3t=2 \\ 2x+4z+4t=3 \\ 2x+2y+3z+8t=2 \\ 5x+3y+9z+19t=6 \end{cases}$ $(S_{10})\ \begin{cases} 3x+6y+5z+6t+4u=14 \\ 5x+9y+7z+8t+6u=18 \\ 6x+12y+13z+9t+7u=32 \\ 4x+6y+6z+5t+4u=16 \\ 2x+5y+4z+5t+3u=11 \end{cases}$

$(S_{11})\ \begin{cases} 2x+y-z+t=1 \\ 3x-2y+2z-3t=2 \\ 5x+y-z+2t=-1 \\ 2x-y+z-3t=4 \end{cases}$ $(S_{12})\ \begin{cases} x+y+z+t+u=7 \\ 3x+2y+z+t-3u=-2 \\ y+2z+2t+6u=23 \\ 5x+4y+3z+3t-u=12 \end{cases}$

$(S_{13})\ \begin{cases} x+3y-2z+5t-7u=3 \\ x+2y-9z+4t-6u=-1 \\ 2x-y+7z-3t+5u=2 \\ x-y-2t+3u=2 \end{cases}$ $(S_{14})\ \begin{cases} x+3y+2z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ 3x-5y+4z=0 \\ x+17y+4z=0 \end{cases}$

Exercice 5 Pour chaque inéquation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$
2. $x^4 + x^2 - 1 > 0$
3. $-2x^2 + 2x - 3 \geqslant 0$
4. $x^3 + 3x^2 - 4 < 0$
5. $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 > 0$
6. $6x^4 - 17x^3 - 13x^2 + 33x - 9 \leqslant 0$
7. $\frac{x+5}{x^2-1} \geqslant 1$
8. $x \geqslant \frac{1}{x}$
9. $\mathrm{e}^{2x} - 2\,\mathrm{e}^{x} - 8 > 0$
10. $\mathrm{e}^{2x} + 6\,\mathrm{e}^{x} + 8 \leqslant 0$
11. $\mathrm{e}^{2x} - 5\,\mathrm{e}^{x} + 4 \geqslant 0$
12. $\ln^2(x) - 7\ln(x) + 12 \geqslant 0$

Exercice 6 Pour chaque équation ou inéquation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $|x+3| = 5$
2. $|x+3| \leqslant 5$
3. $|2x-5| = \left|x^2-4\right|$
4. $|4-x| = x$
5. $\left|x^2+x-3\right| = |x|$
6. $|x+2| + |3x-1| = 4$
7. $x\,|x| = 3x+2$
8. $x + |x| = \frac{2}{x}$
9. $\left|x^2-6x+4\right| \leqslant 1$
10. $x+2 < |2x-5|$
11. $|2x-4| \leqslant |x+2|$
12. $|x+12| \leqslant \left|x^2-8\right|$
13. $|2x-4| \geqslant \left|x^2-4\right|$
14. $\frac{x}{x+1} \leqslant |2x+1| + 1$
15. $x + \frac{1}{x} \leqslant |x+4| + 3$
16. $x^2 - 4\,|x| + 3 > 0$
17. $|x+3| > \left|x^2-3\right|$
18. $|x+2| \geqslant \frac{1-x}{1+x}$

Exercice 7 Pour chaque équation ou inéquation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $x + 5 = \sqrt{x+11}$
2. $x = 1 + \sqrt{x^2-2}$
3. $x + 1 \leqslant \sqrt{x+2}$
4. $x + 3 \leqslant \sqrt{x+5}$
5. $\sqrt{x^2-1} \leqslant 2 - x$
6. $3x^2 - 3x - 4\sqrt{x^2-x+3} = 6$
7. $x + \sqrt{x^2-5x+4} < 2$
8. $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2} = 2$
9. $\left(\frac{2x}{1-\sqrt{1+2x}}\right)^2 < 2x + 9$
10. $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$
11. $2x + 1 < \sqrt{x^2+8}$
12. $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \leqslant \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$
13. $\sqrt{6-x} + \sqrt{3-x} = \sqrt{x+5} + \sqrt{4-3x}$

Exercice 8 Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt[4]{41+x} + \sqrt[4]{41-x} = 4$. On pose $X = \sqrt[4]{41+x}$ et $Y = \sqrt[4]{41-x}$.

1. A l'aide des valeurs de $X+Y$ et X^4+Y^4, déterminer les valeurs possibles de XY.
2. En déduire l'ensemble des valeurs possibles de x.

Exercice 9 Pour chacune des équations ou inéquations, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $\sqrt{|x-3|} = |x-1|$
2. $\sqrt{|x-3|} \leqslant x - 1$
3. $\sqrt{|x^2-4|} \leqslant |x-1|$
4. $\sqrt{|x+2|} \leqslant |x-10|$
5. $\sqrt{1-2x} = |x+7|$

Exercice 10 Soit $m \in \mathbb{R}$. On souhaite déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$(E) \ : \qquad \sqrt{x^2-m} + 2\sqrt{x^2-1} = x.$$

1. Montrer que (E_m) est équivalente à $\begin{cases} x^2 \geqslant m \\ x^2 \geqslant 1 \\ x \geqslant 0 \\ \sqrt{(x^2-m)\,(x^2-1)} = \frac{m+4}{4} - x^2 \end{cases}$.
2. En déduire que (E_m) n'admet des solutions que si $m \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$ et que dans ce cas, (E_m) possède une unique solution que l'on précisera en fonction de m.
3. Vérifier votre résultat pour $m = 0$ et $m = 1$.

Exercice 11 Démontrer les inégalités suivantes.

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$ et $|a| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$.
2. $\forall a, b \in [0;1], \quad a^2 + b^2 - ab \leqslant 1$.
3. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad 1 + \sqrt{ab} \leqslant \sqrt{1+a}\sqrt{1+b}$.
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$.
5. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad ab + bc + ca \leqslant a^2 + b^2 + c^2$.
6. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{2}\left(\ln(a) + \ln(b)\right) \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
7. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (a+b)^4 \leqslant 8\left(a^4+b^4\right)$.

Exercice 12 Démontrer les inégalités suivantes.

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x| + |y| \leqslant |x+y| + |x-y|$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad 1 + |xy-1| \leqslant (1+|x-1|)\,(1+|y-1|)$.

Exercice 13 Démontrer les inégalités suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sin(x) \leqslant x$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leqslant |x|$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leqslant x - 1$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + 1 \leqslant \mathrm{e}^x$.
5. $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \quad |x| \leqslant |\tan(x)|$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\right| \leqslant |x|$.

Exercice 14 Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ et que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 0\right]$, $x - x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2}$. En déduire $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 15 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - \sin(x)| \leqslant \frac{|x|^3}{6}$.