

TD12

Analyse asymptotique

Comparaisons de suites

Exercice 1 Classer les suites dont les termes généraux sont les suivants par ordre de négligeabilité.

$$1. \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{\ln(n)}{n}, \frac{\ln n}{n^2}, \frac{1}{n \ln(n)} \qquad 2. n, n^2, n \ln(n), \sqrt{n} \ln(n), \frac{n^2}{\ln(n)}$$

Exercice 2 Trouver un équivalent simple des suites suivantes.

$$\begin{array}{lll} 1. u_n = \frac{n^3 - \sqrt{n^2 + 1}}{\ln(n) - 2n^2} & 2. u_n = \frac{\ln(n^2 + 1)}{n + 1} & 3. u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \\ 4. u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) & 5. u_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) & 6. u_n = \frac{n! + e^n}{2^n + 3^n} \\ 7. u_n = \ln\left(\sin \frac{1}{n}\right) & 8. u_n = \frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{\sqrt{n^2 - n + 1}} & 9. u_n = \frac{2n^3 - \ln(n) + 1}{n^2 + 1} \\ 10. u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} & 11. u_n = \sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)} & \\ 12. u_n = \frac{(1 - e^{1/n}) \sin \frac{1}{n}}{n^2 + n^3} & 13. u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} & \end{array}$$

Exercice 3 Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{array}{ll} 1. u_n = n \sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2 + 1}\right)} & 2. u_n = \left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\ 3. u_n = \frac{n \sqrt{n+1}}{(n+1) \sqrt{n}} & \end{array}$$

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels telle que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0^+ puis déterminer un équivalent simple de u_n .

Comparaisons de fonctions

Exercice 5 Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes en $+\infty$:

$$\begin{array}{ll} 1. \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} & 2. \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1} \\ 3. \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} & 4. \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} - 1 \\ 5. \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)} & 6. x \ln(x+1) - (x+1) \ln(x) \end{array}$$

Exercice 6 Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes en 0

$$\begin{array}{lll} 1. \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} & 2. \tan(x) - \sin(x) & 3. e^x + x - 1 \\ 4. \ln(1 + \sin(x)) & 5. \ln(e+x) & 6. \ln(\ln(1+x)) \\ 7. e^{\tan(x)} - e^{\sin(x)} & 8. \frac{\arctan(x^2 - x^2 \cos x)}{1 - \sqrt{\cos x}} & 9. \ln^2(x+1) - \ln^2(1-x) \end{array}$$

Exercice 7 Déterminer un équivalent de $\ln(\cos(x))$ en $(\pi/2)^-$

Exercice 8 A l'aide d'équivalents, déterminer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{-x} + x^2}{x - \ln(x)} \qquad 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x) - x}{x + \cos(x)} \qquad 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x e^x - x^2}}{e^x + e^{-x}}$$

Exercice 9 Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln(x)}}{\ln(x)} & 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln(x)}\right)^{\frac{\ln(x)}{x}} & 3. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin(x)}{x \ln(x)} \\ 4. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x) + x^2}{\ln(x + x^2)} & 5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} & \end{array}$$

Exercice 10 Etudier les branches infinies de

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{|x-1| + x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{(x+1) \ln(x+1)}{\ln(x)}.$$

Calcul de développement limité

Exercice 11 Déterminer les développements limités suivants :

$$\begin{array}{ll} 1. \text{DL}_3(\pi/4) \text{ de } x \mapsto \sin(x) & 2. \text{DL}_4(1) \text{ de } x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2} \\ 3. \text{DL}_5(0) \text{ de } x \mapsto \text{sh}(x) \text{ch}(2x) - \text{ch}(x) & 4. \text{DL}_3(0) \text{ de } x \mapsto \ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) \\ 5. \text{DL}_2(0) \text{ de } x \mapsto (1+x)^{1/x} & 6. \text{DL}_3(0) \text{ de } x \mapsto e^{\sqrt{1+x}} \\ 7. \text{DL}_3(0) \text{ de } x \mapsto \ln(2 + \sin(x)) & 8. \text{DL}_3(0) \text{ de } x \mapsto \sqrt{3 + \cos(x)} \\ 9. \text{DL}_3(0) \text{ de } x \mapsto \ln(1 + e^x) & 10. \text{DL}_3\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ de } x \mapsto \cos(x) \\ 11. \text{DL}_3(0) \text{ de } x \mapsto \ln(1 + \sin(x)) & 12. \text{DL}_3(1) \text{ de } x \mapsto \cos(\ln(x)) \\ 13. \text{DL}_4(0) \text{ de } x \mapsto \ln\left(\frac{\text{sh}(x)}{x}\right) & 14. \text{DL}_3(0) \text{ de } x \mapsto \ln(3e^x + e^{-x}) \\ 15. \text{DL}_3(0) \text{ de } x \mapsto \ln(1 + \sqrt{1+x}) & 16. \text{DL}_3(0) \text{ de } x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1} \\ 17. \text{DL}_2(0) \text{ de } x \mapsto \frac{\arctan(x)}{\tan(x)} & 18. \text{DL}_2(1) \text{ de } x \mapsto \frac{x-1}{\ln(x)} \end{array}$$

19. DL₃(0) de $x \mapsto \frac{x - \sin(x)}{1 - \cos(x)}$ 20. DL₂(0) de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\exp(x) - 1}$
21. DL₃(0) de $x \mapsto \frac{x \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x) - 1}$ 22. DL₄(1) de $x \mapsto e^x$

Exercice 12 Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le DL_{2n+2}(0) de $x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$.

Exercice 13 Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$.

- Déterminer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$.
- En déduire les fonctions f de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

Application à l'étude de fonctions

Exercice 14 A l'aide de développements limités, déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes au voisinage de 0 :

- $x \mapsto x(2 + \cos(x)) - 3 \sin(x)$
- $x \mapsto x^x - (\sin(x))^x$
- $x \mapsto \arctan(2x) - 2 \arctan(x)$
- $\arctan \sqrt{1+x} - \arctan \sqrt{1-x}$

Exercice 15 A l'aide de développements limités, déterminer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos(x)}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cosh \left(\frac{1}{x} \right) \right)^{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} - x$

Exercice 16 Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$$

peut être prolongée en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Préciser l'équation de la tangente en $x = 0$ et la position de cette tangente et de la courbe.

Exercice 17 On note f la fonction définie par $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \frac{x^2}{\operatorname{sh}(x)}.$$

- Calculer un développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.
- En déduire que f est dérivable sur \mathbb{R} et préciser la position relative au voisinage de 0 du graphe de f par rapport à sa tangente en 0.
- La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ?
- Faire l'étude complète de f sur \mathbb{R} .

Exercice 18 Soit $f :]-1, 0[\cup]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0. Quelle est alors la position relative de la courbe f par rapport à sa tangente en ce point ?

Exercice 19 Soient a un réel non nul et f la fonction définie au voisinage de 0 par

$$f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{1+x}.$$

Déterminer les éventuelles valeurs de a pour lesquelles f présente un point d'inflexion en 0.

Exercice 20 Soient f, g, h les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = x^x, \quad g(x) = x^{f(x)} \quad \text{et} \quad h(x) = x^{g(x)}$$

Déterminer les limites en 0 de ces trois fonctions.

Exercice 21 Etudier le comportement des fonctions suivantes (existence d'asymptote ou de tangente et position relative) à l'endroit indiqué :

- $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ en 0.
- $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ au voisinage de 0.
- $x \mapsto 2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$.
- $x \mapsto \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ en $+\infty$.
- $x \mapsto \frac{\arctan(x)}{\sin^3(x)} - \frac{1}{x^2}$ en 0.
- $x \mapsto \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1}$ sur \mathbb{R} .
- $x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$ en $+\infty$ (donner un dev. asymptotique avec trois termes).
- $x \mapsto x^{1 - \frac{1}{x^2}}$ sur \mathbb{R} .
- $x \mapsto \sqrt[3]{(x^2 - 2)(x + 3)}$ en $+\infty$.
- $x \mapsto x(\ln(2x+1) - \ln(x))$ en $+\infty$.
- $x \mapsto \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$ en $+\infty$.
- $x \mapsto (x+1) \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$ en $+\infty$.
- $x \mapsto x^3 \arctan\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$ en $+\infty$.