TD16
Polynômes

Anneau et dérivation des polynômes

Exercice 1 Résoudre les équations suivantes :

1. $Q^2 = XP^2$ d'inconnues $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.
2. $P \circ P = P$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 2 Trouver $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

Exercice 3 Résoudre les équations suivantes :

1. $P'^2 = 4P$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.
2. $(X^2+1)P'' - 6P = 0$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$

Exercice 4 Déterminer dans $\mathbb{K}[X]$ les polynômes divisibles par leur polynôme dérivée.

Division

Exercice 5 Montrer les divisibilités suivantes et déterminer les quotients correspondants :

1. $X - 1 | X^3 - 2X^2 + 3X - 2$
2. $X - 2 | X^3 - 3X^2 + 3X - 2$
3. $X + 1 | X^3 + 3X^2 - 2$

Exercice 6 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - P$.
2. En déduire que $P - X$ divise $P \circ P - X$.

Exercice 7 En réalisant une division euclidienne, donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ pour que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$

Exercice 8 Soient $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq b$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

Exercice 9 Soit $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

Exercice 10 Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$ et r le reste de la division euclidienne de k par n. Montrer que le reste de la division euclidienne de X^k par $X^n - 1$ est X^r.

Exercice 11 Montrer que pour tout $(a, b \in \mathbb{N})$, $a | b \Leftrightarrow X^a - 1 | X^b - 1$.

Exercice 12 Soit $P = X^3 - 3X^2 + 2X$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer $P(A)$.
2. Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par P.
3. Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Racines des polynômes

Exercice 13 Soient a, b, c trois éléments non nuls et distincts du corps $\mathbb{K}$. Démontrer que le polynôme $P = \frac{X(X-b)(X-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{X(X-c)(X-a)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{X(X-a)(X-b)}{c(c-a)(c-b)}$ peut s'écrire sous la forme $P = \lambda(X-a)(X-b)(X-c) + 1$ où λ est une constante que l'on déterminera.

Exercice 14 Justifier les divisibilités suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ X^2 | (X+1)^n - nX - 1$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (X-1)^3 | nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.

Exercice 15 Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur à 3 tel que $(X-1)^2 | P - 1$ et $(X+1)^2 | P + 1$ et le déterminer.

Exercice 16 On souhaite trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ vérifiant

$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

1. Montrer que si a est racine de P alors a^2 est racine. En déduire qu'une racine de P vérifie $a = 0$ ou $|a| = 1$.
2. Montrer que si a est racine de P alors $(a-1)^2$ aussi. En déduire les racines de P qui ne sont pas 1 et 0.
3. Conclure.

Exercice 17 Soit P un polynôme de degré $n + 1 \in \mathbb{N}^*$ à coefficients réels, possédant $n + 1$ racines réelles distinctes.

1. Montrer que son polynôme dérivé P' possède exactement n racines réelles distinctes.
2. En déduire que les racines du polynôme $P^2 + 1$ sont toutes simples dans $\mathbb{C}$.

Factorisation des polynômes

Exercice 18 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes :

1. $X^4 - 1$
2. $X^4 + 1$
3. $X^5 - 1$
4. $X^3 + i$
5. $X^3 - i$
6. $(X^2 - X + 1)^2 + 1$
7. $X^9 + X^6 + X^3 + 1$
8. $X^4 + X^2 + 1$
9. $X^4 + X^2 - 6$
10. $X^8 + X^4 + 1$
11. $X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$
12. $X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9$
13. $1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5$

Exercice 19 Soit le polynôme

$$P = \frac{1}{12}\left(2X^6 + 6X^5 + 5X^4 - X^2\right)$$

Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$. Calculer $P(X) - P(X-1)$ et en déduire une forme réduite de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^5$$

Exercice 20 Factoriser le polynôme $(X+i)^n - (X-i)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 21 Soient $a \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$.

Exercice 22 Former la décomposition primaire dans $\mathbb{R}[X]$ de $P = X^{2n+1} - 1$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 23 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$.

1. Former la décomposition primaire de P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n+1}$.

Exercice 24 On définit la suite polynômes (P_n) par $P_0 = 2,\ P_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$

1. Calculer P_2, P_3 et P_4.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$
4. En déduire une expression simple de $P_n(2\cos(\theta))$
5. Déterminer les racines de P et sa factorisation dans $\mathbb{C}$.