

TD 17

Espaces Vectoriels

Combinaisons linéaires

Exercice 1

- Dans \mathbb{R}^3 , $(5, 5, 1)$ est-il combinaison linéaire de $(1, 2, 3)$ et $(3, 1, 2)$?
- Dans $\mathbb{R}[X]$, $16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$ est-il combinaison linéaire de $8X^3 - 5X^2 + 1$ et $X^2 + 7X - 2$?
- Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x \mapsto \cos^2(x)$ est-il combinaison linéaire de $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \cos(2x)$?
- Dans \mathbb{R}^3 , $x \mapsto \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire de sinus et cosinus ?

Sous-espaces vectoriels

Exercice 2 Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 ?

- | | |
|--|---|
| 1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ | 2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ |
| 3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ | 4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ |

Exercice 3 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

- L'ensemble des suites convergentes.
- L'ensemble des suites divergentes.
- L'ensemble des suites arithmétiques
- L'ensemble des suites monotones.
- $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$.

Exercice 4 Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

- Les fonctions monotones.
- Les fonctions qui s'annulent en 0.
- Les fonctions qui s'annulent
- Les fonctions impaires.

Intersection et somme de sous-espaces vectoriels

Exercice 5 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Montrer que

$$F \cap G = F + G \quad \Leftrightarrow \quad F = G$$

Exercice 6 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces de E . Montrer que

- $F \setminus G$ n'est pas un sous espace vectoriel de E .
- $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \Leftrightarrow F \subseteq G$ OU $G \subseteq F$.
- Soient H un troisième sous-espace vectoriel de E . Prouver que

$$G \subset F \Rightarrow F \cap (G + H) = G + (F \cap H).$$

Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Exercice 7 Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E pour :

- $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 3z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 0, 1))$.
- $E = \mathbb{R}^4$, $F = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (2, 1, 0, -1))$ et $G = \text{Vect}((0, 1, 1, 0), (-1, 0, 1, -1))$.
- $E = \mathbb{K}_n[X]$, $F = \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $G = \text{Vect}(1 + X + \dots + X^n)$.
- $E = \mathbb{K}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}$ et $G = \{aX + b \mid a, b \in \mathbb{K}\}$.

Exercice 8 Soit $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$ et $u = (1, \dots, 1)$. Montrer que H et $\text{Vect}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de \mathbb{R}^n .

Exercice 9 Montrer que dans l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , les ensembles \mathcal{P} et \mathcal{I} des fonctions respectivement paires et impaires sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Exercice 10 On se place dans E le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} . On considère $F = \{f \in E \mid f'' + f = 0\}$ et $G = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Exercice 11 Soient $F = \{f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}) \mid \int_{-1}^1 f(t)dt = 0\}$ et $G = \{f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}) \mid f \text{ est constante}\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$.

Exercice 12 On définit les trois sous-espaces suivants de $E = \mathbb{K}_3[X]$:

$$\begin{aligned} F &= \{P \in E \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\} \\ G &= \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\} \\ H &= \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}. \end{aligned}$$

- Montrer que $F \oplus G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = 0\}$
- Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Famille libre, famille liée, famille génératrice

Exercice 13 Dire si les familles suivantes sont libres ou liées. Fournir des relations de dépendance linéaire quand ces relations existent.

- $((1, 1), (1, 2))$ dans \mathbb{R}^2 .
- $((2, 3), (-6, 9))$ dans \mathbb{R}^2 .
- $((1, 3, 1), (1, 3, 0), (0, 3, 1))$, dans \mathbb{R}^3 .
- $((1, 3), (-1, -2), (0, 1))$, dans \mathbb{R}^2 .
- $((3, 0, 1, -2), (1, 5, 0, -1), (7, 5, 2, 1))$, dans \mathbb{R}^4 .

Exercice 14 Les familles suivantes sont-elles génératrices ?

- $((1, 1), (3, 1))$ dans \mathbb{R}^2 .
- $((1, 0, 2), (1, 2, 1))$ dans \mathbb{R}^3 .
- $((1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 3), (3, 2, 1))$ dans \mathbb{R}^3

Exercice 15 Les familles suivantes sont-elles libres dans \mathbb{R}^3 ?

- $(u, v) \in (\mathbb{R}^3)^2$ avec $u = (1, 0, 1)$ et $v = (1, 1, 0)$.
- $(u, v, w) \in (\mathbb{R}^3)^3$ avec $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$ et $w = (1, 1, 1)$.
- $(u, v, w) \in (\mathbb{R}^3)^3$ avec $u = (2, 1, 1)$, $v = (1, -1, 2)$ et $w = (1, 2, -1)$.

Exercice 16 Soit la famille d'applications $(f_i)_{1 \leq i \leq 4}$ de $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ définie pour tout $x \in [0, 2\pi]$ par :

$$f_1(x) = \cos(x), \quad f_2(x) = x \cos(x), \quad f_3(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad f_4(x) = x \sin(x)$$

Montrer que cette famille est libre.

Exercice 17 Pour tout entier $0 \leq k \leq n$, on pose $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_k(x) = e^{kx}$. Montrer que la famille $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 18 Montrer que

$$\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}((X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2)$$

Exercice 19 Soit (u_1, \dots, u_n) une famille libre d'un \mathbb{K} espace vectoriel E et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose $u = \sum_{i=1}^n a_i u_i$. On définit la famille (v_1, \dots, v_n) par, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $v_i = u_i + u$. A quelle condition sur les scalaires a_i la famille (v_1, \dots, v_n) est-elle libre ?

Bases

Exercice 20 Soit $S = (e_1, e_2, e_3) = ((1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3))$ une famille de $E = \mathbb{R}^3$.

- Montrer que S est une base de E .
- Calculer les coordonnées de $v = (5, 7, 12)$ dans cette base.

Exercice 21 Montrer que les vecteurs $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, 0)$, $(1, 0, -1)$ forment une base de \mathbb{R}^3 . Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$ et $(0, 0, 1)$ dans cette base.

Exercice 22 Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $(1, 0, t)$, $(1, 1, t)$, $(t, 0, 1)$ forment une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 23 Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les polynômes $X^2 + t/2$, $X - t$, $(X + t + 1)^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 24 On définit dans \mathbb{R}^4 les sous-ensembles suivants :

$$F = \text{Vect}((1, 2, -1, 0), (0, 1, 1, 1)), \quad G = \text{Vect}((1, 1, -2, -1), (2, -1, -1, 1))$$

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}, \quad K = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{matrix} 2x - y + 2z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{matrix}\}$$

- Montrer que F, G, H et K sont des sous espaces vectoriels.
- Déterminer une base de H et une base de F .
- Déterminer une base de $F \cap G$, de $F \cap H$ et de $H \cap K$.

Exercice 25 Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \in \mathbb{R}^3 \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

- Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .
- Déterminer des bases de $F, G, F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 26 Dans chacun des cas suivants, déterminer si la famille est une base de E . Si c'est le cas, donner les coordonnées du vecteur x dans cette base.

- $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = ((-1, 1, 1); (1, -1, 1); (1, 1, -1))$ et $x = (2, 3, 4)$.
- $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{F} = (1; X; X(X-1); X(X-1)(X-2))$ et $x = X^3$.
- $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} \right)$ et $x = I_4$.
- $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \geq 4, u_n = 0\}$ et $x = (-2, 3, 4, 0, 0, \dots)$.

Exercice 27 Dans \mathbb{R}^3 , déterminer une base et un supplémentaire des sous-espace suivants :

- $F = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 1, 0)$ et $v = (2, 1, 1)$.
- $F = \text{Vect}(u, v, w)$ avec $u = (-1, 1, 0)$, $v = (2, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$.
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.

Exercice 28

- Soient $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$ Montrer que $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- Montrer que la famille $((1, 2, -1, 3), (2, 1, -1, -1))$ est libre dans \mathbb{R}^4 . Compléter cette famille en une base de \mathbb{R}^4 .
- Montrer que la famille de $((1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 3), (3, 2, 1), (1, -1, 1))$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^3 . En extraire une base de \mathbb{R}^3 .