TD 19
Espaces Vectoriels de dimension finie

Dimension et base

Exercice 1 Soient G et F deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $\dim F + \dim G > n$ alors $F \cap G \neq \{0_E\}$.

Exercice 2 Déterminer la dimension et une base des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}_3[X]$ suivants

1. $F_1 = \{\, P \in E \mid P(2) = 0 \,\}$
2. $F_2 = \{\, P \in E \mid P + P'' = 0 \,\}$
3. $F_3 = \{\, P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0 \,\}$
4. $F_4 = \left\{ P \in E \;\middle|\; \int_0^2 P(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}$
5. $F_5 = \left\{ P \in E \;\middle|\; \int_0^2 P(x)\,\mathrm{d}x = 0,\ P(1) = 0 \right\}$
6. $F_6 = \{\, P \in E \mid P(1) = P'(1) = 0 \,\}$
7. $F_7 = \{\, P \in E \mid P(X+1) = 2P(X) \,\}$

Exercice 3 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u_1 = (1,0,1,0)$, $u_2 = (0,1,-1,0)$, $u_3 = (1,1,1,1)$, $u_4 = (0,0,1,0)$ et $u_5 = (1,1,0,-1)$. On pose $F = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$ et $G = \mathrm{Vect}(u_4,u_5)$. Quelles sont les dimensions de $G, F, F+G$ et $F \cap G$?

Exercice 4 On considère $E = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x+y+z+t = 0 \right\}$ et $F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x+y = z+t \right\}$. Déterminer $\dim E$, $\dim F$, $\dim(E+F)$, $\dim(E \cap F)$.

Exercice 5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On considère pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\varepsilon_i = \sum_{k=1}^{i} e_k$.

1. Montrer que $\mathscr{C}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E.
2. Soit $x \in E$. Exprimer les coordonnées de x dans $\mathscr{C}'$ en fonction de ses coordonnées dans $\mathscr{C}$.

Exercice 6 Soit E l'ensemble des fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos(x)$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Déterminer une base et la dimension de E.

Exercice 7 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E l'ensemble des suites réelles p-périodiques, i.e. l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et déterminer celle-ci. (on donnera à ce titre une base de E).

Rang d'une famille de vecteur

Exercice 8 Déterminer le rang des familles suivantes définies dans $\mathbb{R}^4$ par :

1. $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,1,-1)$ et $u_3 = (1,0,1,1)$.
2. $u_1 = (1,1,0,1)$, $u_2 = (1,-1,1,0)$, $u_3 = (2,0,1,1)$ et $u_4 = (0,2,-1,1)$.

Exercice 9 Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère les polynomes :

$$P_1 = 1 + 2X + 3X^2 + 4X^3, \quad P_2 = 2 + 3X + 4X^2 + 5X^3, \quad P_3 = 1 + X + X^2 + X^3$$

$$P_4 = 1 - X + X^2 - X^3, \quad P_5 = 1 + 2X + X^2 + 2X^3$$

1. Déterminer le rang de la famille $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$.
2. On note $F = \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ et $G = \mathrm{Vect}(X^3)$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3[X]$.

Exercice 10 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathscr{F}(]-1,1[, \mathbb{R})$ on considère les fonctions définies pour tout $x \in]-1,1[$ par

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ f_2(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Quel est le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) ?