TD2
Fonctions réelles

Généralités

Exercice 1 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2+x-2}{2x^3+7x^2+2x-3}}$.
2. $g : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.
3. $h : x \mapsto \ln(\cos(2x+\pi))$.
4. $i : x \mapsto \sqrt{\ln(x)-x^2+\frac{1}{2}}$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln\left((x-1)^2+2\right)$. Déterminer les ensembles suivants.

1. $f(\mathbb{R})$
2. $f([-1;1])$
3. $f^{\leftarrow}(\mathbb{R})$
4. $f^{\leftarrow}([2;3])$

Exercice 3 Décomposer les fonctions suivantes en composées de fonctions élémentaires et préciser la suite des ensembles images.

1. $f : x \mapsto \cos\left(\mathrm{e}^{\sin(x)-1}\right)+1$.
2. $g : x \mapsto \sqrt{\frac{-1}{\ln(1-4x^2)}}$.
3. $h : x \mapsto \ln^2\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1\right)$.

Graphe d'une fonction

Exercice 4 Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto |x-1|+2|x+2|$.

Exercice 5 Déduire des fonctions de références l'allure des graphes des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto (2x+3)^2-2$.
2. $g : x \mapsto 1-\frac{2}{x-3}$.
3. $h : x \mapsto 2\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.
4. $i : x \mapsto -1-\frac{\cos(x-1)}{2}$.
5. $j : x \mapsto 2|x+2|-1$.

Propriétés

Exercice 6 Déterminer la parité des fonctions suivantes.

1. $f_1 : x \mapsto 2x^6-5x^4+x^2+6$.
2. $f_2 : x \mapsto \ln(|x|)$.
3. $f_3 : x \mapsto \frac{1}{(x^3-2x)^3} \times \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}$.
4. $f_4 : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$.
5. $f_5 : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$.
6. $f_6 : x \mapsto \left|2x^2-\mathrm{e}^{x^4}+\ln\left(x^2-1\right)\right|$.
7. $f_7 : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
8. $f_8 : x \mapsto x^3\frac{\sin(x)-x}{2+\cos^2(x)}$.

Exercice 7 Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissantes et T-périodiques, avec $T \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ soit croissante sur I et $f \circ f \circ f$ soit strictement décroissante sur I. Montrer que f est strictement décroissante sur I.

Continuité, dérivation

Exercice 9 Etudier le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes puis les dériver sur cet ensemble.

1. $f_1 : x \mapsto \cos^6(x)$.
2. $f_2 : x \mapsto \ln(\ln(x))$.
3. $f_3 : x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$.
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{(x^2+1)^3}$.
5. $f_5 : x \mapsto \frac{1+\sqrt{x}}{(x+1)^{3/2}}$.
6. $f_6 : x \mapsto x^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.
7. $f_7 : x \mapsto \sin\left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)$.
8. $f_8 : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(x)}$.

Exercice 10 Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit les fonctions

$$f_\lambda : \quad x \mapsto \frac{x+\lambda}{x^2+1}.$$

Montrer que les tangentes en 0 aux fonctions f_λ sont parallèles mais distinctes mais que les tangentes en 1 sont concourantes.

Fonction réciproque

Exercice 11 Soit $f : [1;+\infty[\to [0;+\infty[,\ x \mapsto x^2-1$. La fonction f est-elle bijective ?

Exercice 12 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation d'inconnu $x \in \mathbb{R}$,
$$\lambda = \frac{2x}{1+x^2}.$$
2. La fonction f est-elle surjective ? Déterminer $f(\mathbb{R})$.
3. La fonction f est-elle injective ?
4. Montrer que la fonction $g : [-1;1] \to [-1;1],\ x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ est bijective.
5. Retrouver ces résultats en étudiant les variations de f.

Exercice 13 En utilisant la caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité, déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives. Lorsqu'elles sont bijectives, déterminer la fonction réciproque.

1. $f :]1;+\infty[\to]0;+\infty[,\ x \mapsto \frac{1}{x-1}$.
2. $f :]-1;1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{x^2-1}$.
3. $f : [1;+\infty[\to [0;+\infty[,\ x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$.
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2-x$.
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x}$.

Exercice 14 Soit $f :]0;+\infty[,\ x \mapsto 1+x+2\sqrt{x}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et qu'elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un ensemble à J à préciser.
2. Déterminer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in J$.

Etude d'une fonction

Exercice 15 Etudier la ou les branche(s) infinie(s) des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto x\,e^{-x}$.
2. $x \mapsto \frac{2x^2+1}{x^2+3}$.
3. $x \mapsto \frac{x^2+1}{2\sqrt{x}-3}$.
4. $x \mapsto \frac{x^4+2x^3-1}{x^2+4}$.
5. $x \mapsto \frac{x^3+x+1}{x^2+4}$.
6. $x \mapsto x^2 \ln\left(\frac{x^2+2}{x}\right)$.
7. $x \mapsto \frac{x^3+x^2-x}{x^2-1}$.
8. $x \mapsto \frac{x^2-x+1}{|x-1|-x}$.
9. $x \mapsto x+\sqrt{x}$.
10. $x \mapsto x^{\frac{2\ln(x)+1}{\ln(x)}}$.

Exercice 16 Etudier les fonctions suivantes.

1. $x \mapsto e^x - \frac{x^2}{2}$.
2. $x \mapsto e^{x\ln(x)}$.
3. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.
4. $x \mapsto \ln\left(1+x+x^2\right)$.
5. $x \mapsto \ln\left(\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}\right)$.
6. $x \mapsto e^{x^2\ln(x)}$.
7. $x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$.
8. $x \mapsto x^2+1-\frac{2}{x}$.
9. $x \mapsto x^2\,e^{-x}$.
10. $x \mapsto \frac{2\ln(x)+3}{x}$.
11. $x \mapsto \frac{x^2+x}{|x|+1}$.
12. $x \mapsto x+\ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$.

Exercice 17 Soit f la fonction définie par
$$f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et montrer qu'elle est impaire.
2. Calculer les limites de f et préciser les éventuelles asymptotes.
3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Montrer que f est bijective.
5. On pose $u = e^x - 1$ et $v = e^x + 1$. Exprimer e^x puis 1 en fonction de u et v. En déduire une expression de f' en fonction de f.
6. Sans calculer f^{-1}, déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} et calculer $\left(f^{-1}\right)'$.
7. En déduire une expression explicite de f^{-1}.
8. Retrouver le résultat précédent par une autre méthode.

Exercice 18 Soit
$$f : \begin{array}{ccc} [2;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2-4x+5}. \end{array}$$

1. Prouver que f réalise une bijection de $[2;+\infty[$ sur son ensemble image. On note g sa fonction réciproque.
2. Sans calculer g, déterminer l'ensemble de dérivabilité de g, justifier que g admet une tangente verticale en 1 et montrer que pour tout y dans le domaine de dérivabilité, $g'(y)g(y) - 2g'(y) = y$.
3. En déduire une expression explicite de g.
4. Retrouver la question précédente par une méthode directe.

Exercice 19 Etudier les variations de la fonction $f(x) = \cos^5(x) + \sin^5(x)$.