

## TD22 Intégration

### Propriétés de l'intégrale

**Exercice 1** Soit  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = f(c).$$

**Exercice 2** Soit  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ . Montrer que :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt \quad \Leftrightarrow \quad f \leq 0 \quad \text{OU} \quad f \geq 0.$$

**Exercice 3** Soit  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ . Montrer que  $x \rightarrow \int_a^b f(t) \sin(xt) dt$  est lipschitzienne.

### Limite d'intégrales

**Exercice 4** Déterminer les limites suivantes.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{-x}^x \sin(t^2) dt.$

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)} dt$

*On pourra comparer le logarithme à une vitesse polynomiale bien choisie.*

3.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$

*Utiliser la continuité de l'exponentielle pour l'encadrer entre 1 et  $1 + \varepsilon$ .*

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{e^{1/t}}{t} dt$

*Se ramener au cas précédent par un changement de variable.*

5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t} dt$

6.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t} dt$

**Exercice 5** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Montrer que

$$\int_0^1 t^n f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

**Exercice 6** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Déterminer

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

### Sommes de Riemann

**Exercice 7** Déterminer les limites des suites définies par le terme général suivant :

a)  $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$       b)  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$       c)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$

d)  $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + nk^2}$       e)  $\left( \frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}$

**Exercice 8** Soit  $\alpha > 0$ . A l'aide des sommes de Riemann, déterminer un équivalent de  $\sum_{k=1}^n k^\alpha$ .

### Suite définie par une intégrale

**Exercice 9** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_1^e \ln^n(x) dx$

1. Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .
2. Etablir une relation entre  $I_n$  et  $I_{n+1}$ .
3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < I_n < \frac{e}{n+1}.$$

4. Déterminer la limite puis un équivalent simple de  $(I_n)$ .

**Exercice 10** Pour tout entier  $n$ , on pose  $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$

1. Calculer  $u_0, u_1$  et  $u_2$ .
2. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
3. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ln(2)$  et en déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , en écrivant  $\ln(2) - u_n$  sous la forme d'une intégrale, montrer que

$$\frac{1}{6(n+1)} \leq \ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

5. En déduire que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ .

### Formule de Taylor

**Exercice 11** Montrer que pour tout  $x \in ]-1; 1]$ ,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}.$$

**Exercice 12** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$e^x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

**Exercice 13** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $a \in \mathbb{R}$ . Déterminer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

### Fonction dont la variable est une borne d'intégration

**Exercice 14** Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On pose pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t) dt.$$

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \sin(x) \int_0^x \cos(t)g(t) dt - \cos(x) \int_0^x \sin(t)g(t) dt.$$

2. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = \int_0^x \cos(t-x)g(t) dt.$$

3. Montrer que  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y'' + y = g(x)$ .

4. Achever la résolution de cette équation différentielle.

**Exercice 15** Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$\varphi(t) = \frac{\text{sh}(t)}{t}, \text{ pour } t \neq 0 \text{ et } \varphi(0) = 1$$

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) dt$$

1. Montrer que  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $f$  est bien définie et étudier la parité de  $f$ .
3. Justifier que  $f$  est  $\mathcal{C}^2$  et calculer  $f'(x)$ .
4. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

**Exercice 16** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $F : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall x \neq 0, F(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt$$

1. Montrer que  $F$  peut être prolongée par continuité en 0. On effectue ce prolongement.
2. Montrer que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et exprimer  $F'(x)$  à l'aide d'une intégrale.
3. Montrer que  $F$  est dérivable en 0 et observer que  $F'(0) = 0$ .

### Intégration et algèbre linéaire

**Exercice 17** Soit  $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ,  $\varphi : t \mapsto e^{-t^2}$  et  $T : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ f & \mapsto T(f) \end{cases}$  avec

$$T(f) : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_0^{3x} f(t) e^{-t^2} dt \end{cases}$$

1. Montrer que  $T \in \mathcal{L}(E)$ .
2. Soit  $f$  dans  $E$ , montrer que  $T(f)$  est dérivable. Quelle est sa dérivée ?
3.  $T$  est-elle surjective ? Injective ?

**Exercice 18** Soit  $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  et soit  $\varphi$  l'application définie pour tout  $f \in E$  par  $\varphi(f) = g$  avec :

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \int_x^{x+1} f(t) dt.$$

1. Démontrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Étudier l'injectivité et la surjectivité de  $\varphi$ .
3. Montrer que si  $f$  est bornée alors  $\varphi(f)$  aussi.
4. Montrer que si  $f \in E$  admet une limite  $l$  en  $+\infty$  alors  $\varphi(f)$  tend également vers  $l$  en  $+\infty$ .