

## TD 24

### Représentation matricielle des applications linéaires

#### Matrice d'une application linéaire, d'une famille de vecteurs

**Exercice 1** Pour les applications suivantes : déterminer la matrice relative aux bases canoniques, calculer leur rang, dire si elles sont injectives, surjectives, déterminer une base de  $\text{Im}(f)$  et de  $\text{Ker}(f)$ . Si elles sont bijectives, déterminer leur réciproque.

1.  $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (x + y, y - 2x + z) \end{cases}$
2.  $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (y + z, z + x, x + y) \end{cases}$
3.  $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto P(X + 1) \end{cases}$
4.  $f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto (P(1), P(2), P(3), P(4)) \end{cases}$
5.  $f_5 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x + y, 2x - 3y) \end{cases}$
6.  $f_6 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (4x + y, x - y, 2x + 3y) \end{cases}$
7.  $f_7 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (3y + 2z, -x, 4y + 3z) \end{cases}$
8.  $f_8 : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3, f_8(e_1) = e_1 + e_2, f_8(e_2) = e_1 + e_2 + e_3, f_8(e_3) = e_1 + e_3$  où  $(e_1, e_2, e_3)$  est la base canonique de  $\mathbb{K}^3$ .

**Exercice 2** On note  $\mathcal{C}_E$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{C}_F$  celle de  $\mathbb{R}^3$ . On définit dans  $\mathbb{R}_2$  les familles de vecteurs suivante :

$$\mathcal{E}_1 = ((-1, 1), (2, 1)) \quad \mathcal{E}_2 = ((3, -2), (1, 1))$$

On définit dans  $\mathbb{R}_3$  les familles de vecteurs suivante :

$$\mathcal{F}_1 = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)) \quad \mathcal{F}_2 = ((-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, 1)).$$

1. Montrer que les familles  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  sont des bases de  $\mathbb{R}^2$  et que les familles  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  sont des bases de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer  $P_{\mathcal{C}_E, \mathcal{E}_1}$  et  $P_{\mathcal{E}_1, \mathcal{C}_E}$ .
3. De même, déterminer  $P_{\mathcal{C}_E, \mathcal{E}_2}$  et  $P_{\mathcal{E}_2, \mathcal{C}_E}$ .
4. A l'aide des matrices précédentes, calculer  $P_{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}$  et  $P_{\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1}$ .
5. Effectuer le même travail avec  $\mathcal{C}_F, \mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ .
6. Déterminer  $\text{mat}_{\mathcal{F}_1}(f_2)$  (cf *exo1*).
7. Déterminer les matrices  $\text{mat}_{\mathcal{F}_1, \mathcal{E}_2}(f_1)$  et  $\text{mat}_{\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1}(f_5)$ . En déduire  $\text{mat}_{\mathcal{F}_1, \mathcal{E}_1}(f_5 \circ f_1)$ .
8. Soit  $u = \text{mat}_{\mathcal{E}_2}(2, 2)$ . Donner les coordonnées de  $f_7(u)$  dans la base  $\mathcal{F}_2$ .

**Exercice 3** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  de matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $f \circ f = \text{Id}$  et que  $\text{Ker}(f - \text{Id})$  et  $\text{Ker}(f + \text{Id})$  sont supplémentaires. Quelle est la forme de la matrice de  $f$  écrite dans une base adaptée à la supplémentarité de ces deux espaces ?

**Exercice 4** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  de matrice  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $f \circ f = f$  et que  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont supplémentaires. Quelle est la forme de la matrice de  $f$  écrite dans une base adaptée à la supplémentarité de ces deux espaces ?

**Exercice 5** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 \neq 0$  et  $f^3 = 0$ . Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de  $f$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 6** On considère l'application  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}_2[X]$  par  $\varphi(P) = (X^2 + X + 1)P' - (2X - 1)P$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme et donner sa matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. L'application  $\varphi$  est-elle bijective ? Déterminer un antécédent par  $\varphi$  de  $X^2 - 1$ .
3. Résoudre l'équation différentielle  $(x^2 + x + 1)y' - (2x - 1)y = x^2 - 1$ .

**Exercice 7** Calculer le rang des familles de vecteurs suivantes de  $\mathbb{R}^3$  :

1.  $(u_1, u_2, u_3)$  avec  $u_1 = (1, 1, 0)$ ,  $u_2 = (1, 0, 1)$  et  $u_3 = (0, 1, 1)$
2.  $(u_1, u_2, u_3)$  avec  $u_1 = (2, 1, 1)$ ,  $u_2 = (1, 2, 1)$  et  $u_3 = (1, 1, 2)$

3.  $(u_1, u_2, u_3)$  avec  $u_1 = (1, 2, 1)$ ,  $u_2 = (1, 0, 3)$  et  $u_3 = (1, 1, 2)$

**Exercice 8** Calculer le rang des applications linéaires suivantes :

1.  $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$  définie par  $f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$
2.  $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$  définie par  $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$
3.  $f : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^4$  définie par  $f(x, y, z, t) = (x + y - t, x + z + 2t, 2x + y - z + t, -x + 2y + z)$

### Changement de base

**Exercice 9** Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  une base d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On considère l'application linéaire  $f$  définie par

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3, \quad f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3, \quad f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$$

1. Donner une base et la dimension de  $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ .
2. Donner une base et la dimension de  $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$ .
3. Montrer que la réunion des bases précédentes constitue une base de  $E$ . Quelle est la matrice de  $f$  dans cette nouvelle base? Même question pour la matrice de  $f^2$ .

**Exercice 10** Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{C}^2$  de matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}$  dans la base canonique.

1. Montrer que les vecteurs  $\varepsilon_1 = (i, 2)$ ,  $\varepsilon_2 = (-2i, 1)$  forment une base de  $\mathbb{C}^2$ .
2. Montrer que la matrice de  $f$  dans cette nouvelle base est diagonale. En déduire  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 11** Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ . On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique

de  $\mathbb{R}^3$ . On note  $f$  l'endomorphisme associée à la matrice  $A$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ . Soient enfin les vecteurs  $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$ ,  $u_2 = e_1 - e_2$  et  $u_3 = e_1 + e_3$  et  $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Ecrire la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .
3. En déduire sans calcul, une base de  $\text{Ker}(f)$  et de  $\text{Im}(f)$ .

**Exercice 12** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ . On considère l'endomorphisme  $f$  de  $E$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

On pose  $u = e_1 + e_3$ ,  $v = e_1 + e_2$  et  $w = e_1 + e_2 + e_3$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B}' = (u, v, w)$  est une base de  $E$  et déterminer la matrice de  $f$  dans cette base.
2. Calculer  $A^n$ .

**Exercice 13** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base  $\mathcal{B}$ . On considère l'endomorphisme  $f$  de  $E$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2$ . Que peut-on en conclure pour  $f$ ?
2. Déterminer une base de  $\text{Ker}(f)$  et de  $\text{Im}(f)$ .
3. Quelle est la matrice de  $f$  relativement à une base adaptée à la supplémentarité de  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$ .

**Exercice 14** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Déterminer une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  devient  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Déterminer les puissances de la matrice  $B$ , puis celles de  $A$ .

**Exercice 15** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel de dimension 3 et  $B = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ . On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $A$ .

1. Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  de  $E$  telle que la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{C}$  soit  $D$ .
2. Déterminer la matrice de passage  $P$  de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$ . Calculer  $P^{-1}$ .
3. Déterminer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
4. En déduire le terme général des suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1, & y_0 = 0, & z_0 = 0 \\ x_{n+1} = 4x_n - 2y_n - 2z_n \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$