

TD 26

Géométrie du plan

Repérage dans le plan

Exercice 1 [Coordonnées polaires]

- Placer dans le plan les points dont on donne un système de coordonnées polaire (ρ, θ) : $M_1(2, \pi/4)$, $M_2(-1, -\pi)$, $M_3(-2, 3\pi/4)$, $M_4(3, \frac{\pi}{12})$, $M_5(-1, \frac{7\pi}{8})$. Déterminer les coordonnées cartésiennes de chacun de ces points.
- Déterminer un système de coordonnées polaires des points suivants dont on donne les coordonnées cartésiennes : $A_1(2, 0)$, $A_2(3, -3)$, $A_3(-1, \sqrt{3})$.

Exercice 2 Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $\Omega(1, -1)$ et les vecteurs $\vec{u}(1, 2)$ et $\vec{v}(-2, 3)$.

- Montrer que $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère direct. Est-il orthonormal ?
- Soit $A(5, 6)$ et $\vec{d}(-3, -3)$. déterminer les coordonnées de A et $\vec{d}$ dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.
- Déterminer dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ une équation du cercle de centre O et de rayon 1.

Exercice 3 [Bases orthonormées] Soient $\vec{u}(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ et $\vec{v}(-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.

- Montrer que $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé de P . Est-ce un repère orthonormé direct de P ?
- Soit M un point du plan, on note (x, y) (resp. x', y') les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (resp. $(O, \vec{u}, \vec{v})$).
 - Exprimer x et y en fonction de x' et y' .
 - Exprimer x' et y' en fonction de x et y .

Déterminant

Exercice 4 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Développer : $\det(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$

Exercice 5 Soient A , B et C trois points du plan distincts deux à deux et non alignés.

- Montrer que : $\det(\vec{AB}; \vec{AC}) = \det(\vec{BC}; \vec{BA}) = \det(\vec{CA}; \vec{CB})$.
- En déduire que $\frac{BC}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{CA}{\sin(\widehat{CBA})} = \frac{AB}{\sin(\widehat{ACB})}$

Droites

Exercice 6 On considère $A(-1, -3)$, $B(2, -2)$ et $C(0, 4)$. Donner une équation de la droite d_1 passant par A et B . Donner une équation de la droite d_2 passant par C et orthogonale à d_1 ainsi qu'une équation de la droite d_3 passant par C et parallèle à d_1 .

Exercice 7 Soit un triangle ABC . Deux droites Δ, Δ' parallèles à (BC) coupent (AB) et (AC) en D et E , D' et E' respectivement. Les droites (CD) et (BE) se coupent en un point M . Les droites (CD') et (BE') se coupent en un point M' . Montrer que les trois points A, M, M' sont alignés. (Indication : utiliser le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$)

Exercice 8 On considère le triangle ABC pour lequel les droites (AB) , (AC) et (BC) ont pour équations respectives $2x + y = 3$, $x + y = 2$ et $3x + 2y = 4$.

- Déterminer les coordonnées des sommets de ce triangle.
- Déterminer une équation pour chaque médiane et vérifier que les médianes sont concourantes.
- Calculer l'aire de ABC .

Exercice 9 Soient $A(6, 4)$ et d d'équation $2x - y - 3 = 0$. Déterminer la distance de A à d , puis les coordonnées du projeté orthogonal de A sur d .

Exercice 10 [Bissectrices de deux droites] Former les équations cartésiennes (dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé) des bissectrices des deux droites $d_1 : 3x + 4y + 3 = 0$, $d_2 : 12x - 5y + 4 = 0$.

Exercice 11 [Droites parallèles]

- On considère la droite d de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer une équation cartésienne de d .
- Déterminer une équation cartésienne de la droite d' parallèle à d et passant par $B(1, 1)$.
- On considère la famille de droites (Δ_m) avec $\Delta_m : mx + (m - 1)y + 2 = 0$. Déterminer la valeur de m pour laquelle Δ_m est parallèle à d .

Cercles

Exercice 12 [Equation cartésienne, tangentes à un cercle]

- Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(-2, -1)$ passant par $B(1, 1)$.
- On considère le cercle $\mathcal{C}$ dont une équation cartésienne est : $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$. Préciser le centre et le rayon de $\mathcal{C}$.
Déterminer une équation cartésienne des tangentes à $\mathcal{C}$ passant par $A(0, 2)$.
- Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $(1 - m^2)x + 2my = 4m + 2$.
Montrer que ces droites sont toutes tangentes à un unique cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 13 Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les cercles d'équations respectives $x^2 + y^2 = 100$ et $x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0$.

- Déterminer le centre et le rayon des cercles.
- Soit d la droite d'équation $-4x - 3y + 4 = 0$. Déterminer les points d'intersection entre d et chacun des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
- Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents et donner une équation de la tangente commune.

Exercice 14 Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ et $A(4, -4)$. On peut mener par le point A deux tangentes au cercle $\mathcal{C}$. Calculer la distance entre les points d'intersection de ces tangentes et de $\mathcal{C}$.

Exercice 15 On considère le cercle de centre O et de rayon 1 et le cercle de centre $\Omega(2, 3)$ et de rayon $R > 0$.

- Déterminer une équation de chacun de ces cercles ainsi qu'une équation de leur axe radical Δ .
- Calculer la distance de O à Δ et montrer qu'il existe deux valeurs de R pour lesquelles ces cercles sont tangents.
- Dans chaque cas, calculer les coordonnées des points d'intersection et montrer qu'ils sont alignés avec les centres.

Exercice 16 On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Former une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}$ au point $M(\cos(\theta), \sin(\theta))$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 17 Pour $m \in \mathbb{R}$, on donne le cercle $\mathcal{C}_m$ d'équation :

$$x^2 + y^2 - 4mx - 2my + \frac{9m^2}{2} - m - \frac{1}{2} = 0.$$

Pour $m \neq -1$, calculer le centre et le rayon de $\mathcal{C}_m$. Que peut-on dire de $\mathcal{C}_{-1}$?
Montrer que tous les cercles $\mathcal{C}_m$ ont deux tangentes communes et donner leurs équations.

Problèmes

Exercice 18 On fixe un vecteur $\vec{u}$ non nul, un point A et un réel k .

- Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\langle \vec{u}, \overrightarrow{AM} \rangle = k$.
- Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\det(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = k$.

Exercice 19 On considère le triangle ABC de sommets $A(1, 1)$, $B(10, 13)$ et $C(13, 6)$.

- Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit ainsi que son rayon.
- Déterminer les coordonnées de l'orthocentre.
- Déterminer le lieu des points $M(x, y)$ vérifiant $d(M, (AB)) = d(M, (AC))$.

Exercice 20 Soient A et B deux points distincts et k un réel. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

$$\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \rangle = k$$

Exercice 21 Soient dans le plan deux points A et B distincts et un réel k . Etudier l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = k$.

Exercice 22 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et A et B deux points du plan. Déterminer les points M du plan tels que : $\langle \overrightarrow{AM}, \vec{u} \rangle = \langle \overrightarrow{BM}, \vec{v} \rangle$

Exercice 23 Soit ABC un triangle équilatéral du plan et M un point l'intérieur de celui-ci. Montrer que la somme des distances de M aux trois cotés de ABC ne dépend pas de M . (Indication : introduire un repère adapté)

Exercice 24 [Faisceaux de cercles orthogonaux] Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Soit a un réel tel que $|a| \geq 1$; on considère le cercle Γ_a de centre $A(a, 0)$ de rayon $R = \sqrt{a^2 - 1}$.
Ecrire l'équation cartésienne de Γ_a .
Représenter sur une même figure les cercles $\Gamma_{3/2}$, Γ_2 , Γ_3 , $\Gamma_{-3/2}$, Γ_{-2} et Γ_{-3} .
- On considère les points $C(1, 0)$ et $D(-1, 0)$. Montrer que pour tout point M du cercle Γ_a , le rapport MC/MD est constant.
- Soit b un réel. On définit le cercle Γ'_b de centre $B(0, b)$ passant par C et D .
Ecrire l'équation cartésienne de Γ'_b . Représenter sur la figure précédentes les cercles Γ'_0 , Γ'_1 , Γ'_2 , Γ'_{-1} et Γ'_{-2} .
- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $|a| \geq 1$, et M_0 l'un des points d'intersection des cercles Γ_a et Γ'_b .

Ecrire des équations cartésiennes des tangentes en M_0 à Γ_a et Γ'_b . Vérifier que ces tangentes sont orthogonales.