

TD4

Nombres complexes

L'ensemble des nombres complexes

Exercice 1 Calculer

$$1. z_1 = (6 + 3i)(4 - 2i) \quad 2. z_2 = \frac{7+3i}{3-7i} \quad 3. z_3 = (1 + i)^3$$

Exercice 2 Donner la forme algébrique de $(1 + i)^{125}$ puis de $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{125}$.

Exercice 3 Donner une caractérisation simple sur $z \in \mathbb{C}$ pour que le complexe $Z = 1 + iz$ soit réel.

Exercice 4 Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $Z = z^2 + z + 1$ soit réel.

Forme trigonométrique

Exercice 5 Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants.

$$\begin{aligned} 1. z_1 &= 3 + 3i & 2. z_2 &= -1 - \sqrt{3}i & 3. z_3 &= -\frac{4}{3}i \\ 4. z_4 &= -2 & 5. z_5 &= \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} & 6. z_6 &= \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} \\ 7. z_7 &= e^{i\theta} + e^{2i\theta}, \theta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 6 Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |a| < 1$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq \frac{1}{\bar{a}}$, on définit $f(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Montrer que \mathbb{U} est stable par f , c'est-à-dire que $f(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{U}$.

Exercice 7

- Déterminer l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe vérifie $\frac{z-i}{z-1} \in \mathbb{R}$.
- Déterminer l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe vérifie $\frac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 8 Soit $z \in \mathbb{U}$. Calculer $|1+z|^2 + |1-z|^2$.

Exercice 9 Déterminer la forme polaire de $1 + i$, $1 - i$ et $\sqrt{3} + i$. En déduire une expression simplifiée des complexes suivants :

$$\begin{aligned} 1. z_1 &= \frac{(1-i)^5}{(i+1)^4} & 2. z_2 &= (1+i)^{30} \\ 3. z_3 &= \left((1-i)^2 (\sqrt{3}+i)\right)^{24} \end{aligned}$$

Exercice 10 On pose $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

- Déterminer la forme algébrique de z_3 puis sa forme polaire.
- En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 11 Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ en utilisant des formules trigonométriques. En déduire une expression simple de

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8.$$

Exercice 12

- En utilisant la formule de Moivre, calculer $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
- Simplifier $\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}$. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
- Déterminer $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 13 Soit $\theta \neq \pi [2\pi]$. Simplifier $\frac{1+e^{i\theta}}{1+e^{-i\theta}}$.

Exercice 14 Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} 1. \cos^4(x) & & 2. \sin^5(x) \\ 3. \sin^2(x) \cos^3(x) & & 4. \cos(x) \cos^2(2x) \end{aligned}$$

Exercice 15 Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction de $\cos(x)$ ou $\sin(x)$ et de leurs puissances les nombres suivants :

$$1. \sin(3x) \quad 2. \sin(5x) \quad 3. \cos(6x)$$

Exercice 16 Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que les modules de z , $\frac{1}{z}$ et $z-1$ soient égaux.

Exercice 17 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$\begin{aligned} C &= \sum_{k=0}^n \cos(a + kb) = \cos(a) + \cos(a+b) + \dots + \cos(a+nb) \\ S &= \sum_{k=0}^n \sin(a + kb) = \sin(a) + \sin(a+b) + \dots + \sin(a+nb) \end{aligned}$$

- Calculer C et S lorsque $b \in 2\pi\mathbb{Z}$.
- On suppose maintenant que $b \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que

$$C + iS = e^{i\left(\frac{nb}{2} + a\right)} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}b\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}.$$

et en déduire C et S .