TD5
Calcul algébrique

La somme $\sum$ et le produit $\prod$

Exercice 1 Calculer la somme des n premiers entiers impairs.

Exercice 2 Calculer la somme $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+(n-1)\cdot n$.

Exercice 3 Calculer la somme $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n\,(n+1)\,(n+2)$.

Exercice 4 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{2n}(-1)^k\,k^2$.

Exercice 5 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

1. $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)^3$
2. $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$
3. $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$
4. $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}2^k5^{n-k}$
5. $S=\sum\limits_{k=9}^{29}\frac{k-2}{3}$
6. $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$
7. $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k\times k!$
8. $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(4^k+3k+2n\right)$

Exercice 6 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. A l'aide du changement d'indice $\tilde{k}=n-k$, calculer $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Exercice 7 Pour tout $a\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n(a)=\sum_{k=1}^{n}ka^k$.

1. Si $a=1$, calculer $S_n(1)$.
2. Si $a\neq 1$, à l'aide du changement d'indice $\tilde{k}=k-1$, calculer $S_n(a)$.
3. On suppose ici que $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. En dérivant $x\mapsto T_n(x)=\sum_{k=1}^{n}x^k$, calculer à nouveau $S_n(a)$, pour $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Exercice 8 Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la somme $S_n=\sum_{k=0}^{2n}\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

1. A l'aide de l'exponentielle complexe, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=0$.
2. A l'aide d'un changement d'indice, retrouver le résultat précédent.

Coefficient binomial et formule du binôme de Newton

Exercice 9 Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $A_n=\sum\limits_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\text{ pair}}}\binom{n}{k}$ et $B_n=\sum\limits_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\text{ impair}}}\binom{n}{k}$. A l'aide de leur somme et de leur différence, calculer A_n et B_n.

Exercice 10 Soit $n\in\mathbb{N}$. A l'aide de la fonction $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f_n(x)=(1+x)^n$, ainsi que ses dérivées et/ou primitives, (re)trouver les valeurs des sommes suivantes.

1. $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$
2. $T_n=\sum\limits_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$
3. $U_n=\sum\limits_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$
4. $V_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

Exercice 11 Soient $n\in\mathbb{N}$ et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Calculer la somme $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(a+kb)$.

Sommes doubles

Exercice 12 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer les sommes doubles suivantes.

1. $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}i$
2. $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}i$
3. $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}i^2$
4. $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}j^2$
5. $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j)$
6. $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)^2$
7. $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}ij$
8. $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|i-j|$
9. $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j}$
10. $\sum\limits_{0\leqslant j\leqslant i\leqslant n}\binom{i}{j}$
11. $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j)$
12. $\sum\limits_{0\leqslant i,j\leqslant n}2^{2i-j}$

Exercice 13 Soient $n\in\mathbb{N}$ et $S_n=\sum\limits_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}2^j$.

1. En choisissant soigneusement l'ordre de sommation, montrer que $S_n=n2^{n+1}+1$.
2. Montrer également que l'on a $S_n=\sum\limits_{j=0}^{n}(j+1)\,2^j$.
3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En déduire que $\sum\limits_{j=1}^{n}j2^{j-1}=(n-1)\,2^n+1$.
4. Calculer alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ la somme double $T_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i+1}j2^{j-1}$.