

TD6

Fonctions usuelles

Les fonctions logarithme et exponentielle

Exercice 1 Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des réels vérifiant le système d'équations.

$$1. \begin{cases} x + y = 25 \\ \ln(x) + \ln(y) = \ln(100) \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ \ln(x) + \ln(y) = \ln(60) \end{cases}$$

Exercice 2

1. Montrer que pour tout $x \in]-1; +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e \leq \frac{1}{(1 - \frac{1}{n})^n}$.

Les fonctions logarithmes et exponentielles en base a

Exercice 3 Déterminer l'ensemble des réels $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\})^2$ tels que

$$1. \begin{cases} 4(\log_x(y) + \log_y(x)) = 17 \\ xy = 243 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 7(\log_x(y) + \log_y(x)) = 50 \\ xy = 256 \end{cases}$$

Exercice 4 Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, exprimer $\log_a(x) \log_{a^2}(x)$ en fonction de $\log_a(x)$.
2. Résoudre l'équation $\log_3(x) \log_9(x) = 2$.

Les fonctions puissances

Exercice 5 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $u(x) = e^{x^2}$ et $v(x) = \frac{1}{x} \ln(x^{\frac{1}{x}})$. Simplifier $u(x)^{v(x)}$.

Exercice 6 Déterminer les limites suivantes.

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^x \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} x^{x^x} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad 4. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{x}} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sqrt{x}} \quad 7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} \quad 8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$$

Exercice 7 Déterminer les limites suivantes.

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x \ln(x) + e^x} \quad 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 2}{e^x - 3} \quad 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{x^{10} + 5}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x \cos(x) \quad 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin(x)}{1 - x^2} \quad 6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2x - \ln^2(x)}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{x+1}{x}\right) \quad 8. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} + x \quad 9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$$

Exercice 8 Résoudre les équations suivantes :

$$1. 5^{3x} = 7 \quad 2. 2^{x^3} = 3^{x^2} \quad 3. 2^x + \frac{6}{2^x} = 5$$

$$4. x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \quad 5. e^x + e^{1-x} = e + 1$$

$$6. 2^{2x-1} + 3^x + 4^{x+\frac{1}{2}} - 9^{\frac{x}{2}+1} = 0$$

Exercice 9 Montrer que $\forall x \in]0, 1[$,

$$x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}.$$

Les fonctions hyperboliques

Exercice 10 Simplifier $A(x) = \frac{\text{ch}(\ln(x)) + \text{sh}(\ln(x))}{x}$.

Exercice 11 Dans chacun des cas, déterminer l'ensemble des réels x solutions de l'équation.

$$1. \text{ch}(x) = 2 \quad 2. 5 \text{ch}(x) - 4 \text{sh}(x) = 3$$

Exercice 12

1. Etablir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\text{sh}(x) \geq x$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 13 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$C_n = \sum_{k=0}^n \text{ch}(a + kb) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \text{sh}(a + kb).$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $C_n + S_n$ et $C_n - S_n$.
2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ les valeurs de C_n et de S_n .

Exercice 14 Soit $a \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $\text{sh}(a) + \text{sh}(a+x) + \text{sh}(a+2x) + \text{sh}(a+3x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 15 On pose $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$. Simplifier l'expression $y = \ln\left(\sqrt{\frac{1+\text{th}(x)}{1-\text{th}(x)}}}\right)$.

Exercice 16 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$.

1. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\text{th}(x) = \frac{2}{\text{th}(2x)} - \frac{1}{\text{th}(x)}$.
2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un calcul de la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \text{th}(2^k x)$$

Les fonctions circulaires réciproques

Exercice 17 Calculer les nombres suivants.

1. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
2. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
3. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$
4. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$
5. $\arctan(\sqrt{3})$
6. $\arctan(-1)$
7. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)$
8. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$
9. $\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$
10. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{19\pi}{5}\right)\right)$
11. $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{47\pi}{8}\right)\right)$
12. $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$

Exercice 18 Donner le domaine de définition des expressions suivantes puis les simplifier.

1. $\cos(2 \arccos(x))$
2. $\cos(2 \arcsin(x))$
3. $\sin(\arccos(x))$
4. $\sin(2 \arctan(x))$
5. $\tan(2 \arcsin(x))$

Exercice 19 Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que $\arctan(p+1) - \arctan(p) \in]0; \frac{\pi}{2}[$.
2. Exprimer $\arctan(p+1) - \arctan(p)$ sous la forme $\arctan(u)$, avec $u \in \mathbb{R}$ à déterminer.
3. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$S_n = \sum_{p=0}^n \arctan\left(\frac{1}{p^2 + p + 1}\right).$$

Exercice 20 Soient $p > 0$ et $q > 0$ deux entiers. On note \mathcal{D} l'ensemble de définition de la fonction tangente.

1. Montrer que $\arctan\left(\frac{p}{q}\right) + \arctan\left(\frac{q-p}{q+p}\right) \in \mathcal{D}$

2. Calculer $\arctan\left(\frac{p}{q}\right) + \arctan\left(\frac{q-p}{q+p}\right)$.

3. Ecrire $4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ sous forme $\arctan(u)$, où u est un réel à déterminer.

4. Déduire des questions précédentes la formule $4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 21 Dans chacun des cas, déterminer l'ensemble des réels x solutions.

1. $\arcsin(x) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{13}\right)$
2. $\arcsin(\tan(x)) = x$
3. $\arccos(x) = \arcsin(2x)$
4. $\arctan(x) + \arctan(x\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}$
5. $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \arctan(x)$
6. $\arcsin\left(\frac{\tan(x)}{2}\right) = \arctan(x)$

Exercice 22 Résoudre les équations suivantes :

1. $\arcsin(x) + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.
2. $\arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2}$
3. $\arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4}$
4. $\arcsin 2x = \arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2})$
5. $2 \arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$
6. $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$.

Exercice 23 Résoudre l'équation $2^{\sin^2(x)} = \cos(x)$.

Exercice 24 Etudier la fonction suivante :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) - 2 \arctan x.$$

Exercice 25 Etudier puis simplifier les expressions suivantes :

1. $f(x) = \arccos(1-2x^2)$.
2. $f(x) = \arcsin(3x-4x^3)$
3. $f(x) = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$
4. $f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$
5. $f(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
6. $f(x) = \arctan\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$
7. $f(x) = \arctan(\sqrt{1+x^2}-x)$

Exercice 26 Etudier les fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \arctan\frac{x}{x+1} + \arctan\frac{x}{x-1} + \arctan 2x^2$.
2. $f : x \mapsto \arcsin\sqrt{\frac{1+\sin(2x)}{2}}$.
3. $f : x \mapsto \arcsin(\cos(x)) + \arccos(\sin(x))$.
4. $f : x \mapsto \arccos(\cos(x)) + \frac{1}{2} \arccos(\cos(2x))$.
5. $f : x \mapsto \arccos(\cos(x)) + \frac{1}{2} \arccos(\cos(2x)) + \frac{1}{6} \arccos(\cos(3x))$.