TD7
Equations et géométrie complexes

Equations algébriques complexes

Exercice 1 Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ des complexes suivants.

1. $z_1 = 7 + 4i$
2. $z_2 = 7 - 24i$
3. $z_3 = -15+8i$
4. $z_4 = 9 + 40i$

Exercice 2 Résoudre les équations suivantes d'inconnu $z \in \mathbb{C}$.

1. $z^2 - (3+4i)\,z - 1 + 5i = 0$.
2. $(2+i)\,z^2 - (5-i)\,z + 2 - 2i = 0$.
3. $z^4 - (5-14i)\,z^2 - 2\,(12+5i) = 0$.
4. $z^4 - (3+8i)\,z^2 - 16 + 12i = 0$.
5. $z^4 + (3-6i)\,z^2 - 2\,(4+3i) = 0$.
6. $z^4 + (2i-1)\,z^2 - 1 - i = 0$.

Exercice 3 Déterminer toutes les solutions réelles et imaginaires pures de l'équation d'inconnu $z \in \mathbb{C}$,

$$z^4 - 4\,(1+i)\,z^3 + 12iz^2 + 8\,(1-i)\,z - 5 = 0.$$

En déduire toutes les solutions complexes.

Exercice 4 Soit $(x, y, z) \in \mathbb{U}^3$. Montrer que $|x+y+z| = |xy+xz+yz|$.

Exercice 5 Résoudre l'équation suivante d'inconnu $z \in \mathbb{C}$, $z^4 = \frac{16\sqrt{2}}{1-i}$.

Exercice 6 Déterminer les racines quatrièmes dans $\mathbb{C}$ du complexe $Z = -119+120i$

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation suivante d'inconnu $z \in \mathbb{C}$, $z^n = \overline{z}$.

Exercice 8 On pose $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{7}}$ et on définit

$$S = \omega + \omega^2 + \omega^4 \qquad \text{et} \qquad T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6.$$

Calculer $S+T$ et ST et en déduire S et T.

Exercice 9 Pour chacun des systèmes suivants, déterminer les complexes $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ solutions.

1. $\begin{cases} u+v=2 \\ uv=2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} u+v=3 \\ \frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{9+3i}{10} \end{cases}$
3. $\begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^2=-1+2i \end{cases}$
4. $\begin{cases} u^2v+uv^2=6 \\ u^3+v^3=9 \end{cases}$

Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

1. Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P(z) = z^{n-1} + \cdots + z + 1$
2. Démontrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = n$.
3. En déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Applications géométriques

Exercice 11 Soient $A\,(2+4i)$ et $B\,(8+i)$ deux points du plan complexe $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. Montrer que le triangle OAB est rectangle.

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Calculer la longueur d'un côté d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

Exercice 13 Soit M un point du plan complexe d'affixe $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, I le point d'affixe i et N l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Démontrer que les points M, I et N sont alignés si et seulement si $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ et en déduire l'ensemble des points M solutions.
2. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que MIN soit rectangle en I.
3. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que MIN soit équilatéral.
   Donner le résultat sous forme polaire.

Exercice 14 Soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du plan complexes.

1. Démontrer que si $c = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\,(b-a) + a$ alors,
$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc.$$
2. On fixe $a \in \mathbb{C}$ l'affixe de A et $b \in \mathbb{C}$ l'affixe de C. Déterminer l'ensemble des points $C(c)$, $c \in \mathbb{C}$ vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$. Que peut-on alors dire du triangle ABC ?

Exercice 15 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe dont l'affixe $z \in \mathbb{C}$ vérifie l'égalité donnée.

1. $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1$
2. $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$