

TD8

Calcul de primitives et d'intégrales

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 1. \int_{1/2}^1 \frac{dx}{x^2} & 2. \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx & 3. \int_1^2 \ln(x) dx \\
 4. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} & 5. \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & 6. \int_0^{\pi/4} \tan(x) dx
 \end{array}$$

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

$$\begin{array}{ll}
 1. \int_0^1 \ln(1+x^2) dx & 2. \int_0^1 \arctan(x) dx \\
 3. \int_0^{1/2} \arcsin(x) dx & 4. \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x)) dx
 \end{array}$$

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variables.

$$\begin{array}{ll}
 1. \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx & 2. \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx \\
 3. \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx & 4. \int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx \\
 5. \int_{1/2}^1 \sqrt{e^x-1} dx \quad (\text{poser } u = \sqrt{e^x-1})
 \end{array}$$

Exercice 4 Calculer l'intégrale $I = \int_{-1}^1 \arctan(e^x) dx$.

Indication : poser $t = -x$.

Exercice 5 Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 1. x \mapsto x e^{x^2} & 2. x \mapsto \frac{x^2}{1+x^3} & 3. x \mapsto \frac{\ln(x)}{x} \\
 4. x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)} & 5. x \mapsto \cos(x) \sin(x) & 6. x \mapsto \tan(x) \\
 7. x \mapsto \frac{x}{1+x^4} & 8. x \mapsto \frac{x^5}{1+x^{12}} & 9. x \mapsto \tan^2(x) \\
 10. x \mapsto \tan^3(x) & 11. x \mapsto \tan^4(x) & 12. x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} \\
 13. x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}} & 14. x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x-1}}} & 15. x \mapsto \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2
 \end{array}$$

Exercice 6 Calculer les primitives des fonctions suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

$$\begin{array}{lll}
 1. x \mapsto \ln(x) & 2. x \mapsto x e^x & 3. x \mapsto (x^2 - x + 1) e^x \\
 4. x \mapsto x \ln(x) & 5. x \mapsto x \cos(x) & 6. x \mapsto x \sin^3(x) \\
 7. x \mapsto \arctan(x) & 8. x \mapsto x \arctan(x) & 9. x \mapsto (x+1) \operatorname{ch}(x) \\
 10. x \mapsto \cos(x) e^x & 11. x \mapsto \sin(2x) e^{-x} & 12. x \mapsto \cos(x) \operatorname{ch}(x)
 \end{array}$$

Exercice 7 En passant par les fonctions complexes, calculer les primitives des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{ll}
 1. x \mapsto \cos(x) e^x & 2. x \mapsto x \sin(x) e^x \\
 3. x \mapsto 2x \sin^2(x) e^x & 4. x \mapsto \sin(\ln(x))
 \end{array}$$

Exercice 8 A l'aide d'un changement de variables, calculer les primitives des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{ll}
 1. x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^3}}} & 2. x \mapsto \frac{\ln(x)}{x+x \ln^2(x)} \\
 3. x \mapsto \frac{e^{2x}}{1+e^x} & 4. x \mapsto \frac{1}{\cos^4(x)} \quad (\text{poser } u = \tan(x)) \\
 5. x \mapsto \frac{\cos(x)}{1+\cos^2(x)} \quad (\text{poser } u = \sin(x)) & 6. x \mapsto \frac{1}{\cos(x)} \quad (\text{poser } u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)) \\
 7. x \mapsto \frac{1}{2+\cos(x)} \quad (\text{poser } u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)) & 8. x \mapsto \frac{\operatorname{ch}(x)}{1+\operatorname{ch}^2(x)} \\
 9. x \mapsto \frac{x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} \quad (\text{poser } x = 2 + \sin(u)) \\
 10. x \mapsto \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \quad (\text{poser } x = \operatorname{sh}(u))
 \end{array}$$

Exercice 9 Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 1. x \mapsto \frac{1}{2x^2-6x+4} & 2. x \mapsto \frac{x+1}{2x^2-6x+4} & 3. x \mapsto \frac{x^3+1}{2x^2-6x+4} \\
 4. x \mapsto \frac{1}{x^2-2x+1} & 5. x \mapsto \frac{2x+1}{x^2-2x+1} & 6. x \mapsto \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2-2x+1} \\
 7. x \mapsto \frac{1}{2x^2-2x+2} & 8. x \mapsto \frac{x+2}{2x^2-2x+2} & 9. x \mapsto \frac{x^3+2x^2+1}{2x^2-2x+2} \\
 10. x \mapsto \frac{1}{2x^2-8x+8} & 11. x \mapsto \frac{2}{x^2-5x+4} & 12. x \mapsto \frac{2}{x^2-x-6} \\
 13. x \mapsto \frac{3}{x^2+x+2} & 14. x \mapsto \frac{1}{2x^2+2x+1} & 15. x \mapsto \frac{x}{x^2-6x+9} \\
 16. x \mapsto \frac{x^3+1}{x^2-6x+9} & 17. x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2+2x-3} & 18. x \mapsto \frac{x+1}{x^2+3x+1} \\
 19. x \mapsto \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} & 20. x \mapsto \frac{x^3}{2x^2+2x+1}
 \end{array}$$