TD 9
Equations différentielles

Equations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$
2. $y' + y = 2\sin(x)$
3. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$
4. $y' - y = (x+1)e^x$
5. $y' - 2y = \cos(3x) + e^{2x}$
6. $y' + 2y = (x^2+1)e^{-x}$
7. $y' + iy = (x+1)\cos(x)$
8. $y' + y = x\,\mathrm{ch}(x)$

Exercice 2 Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés :

1. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. $(1+x^2)y' + xy = 1 + 2x^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. $(x\ln x)y' - y = \ln x$ sur $[1, +\infty[$.
4. $xy' + y = \cos x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
5. $(1-x)y' + y = \frac{x-1}{x}$ sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.
6. $2xy' + y = x^n,\ n \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$
7. $\sqrt{1-x^2}y' + y = 1$ sur $]-1, 1[$.
8. $(1+\cos^2 x)y' - \sin(2x)y = \cos x$ sur $\mathbb{R}$.
9. $y'\cos x + y\sin x = 1$ sur $]0, \pi[$.
10. $\mathrm{ch}(x)y' - \mathrm{sh}(x)y = \mathrm{sh}^3(x)$ sur $\mathbb{R}$
11. $\mathrm{sh}(x)y' - \mathrm{ch}(x)y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

Exercice 3 Donner la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \mathrm{ch}(t)y' + \mathrm{sh}(t)y = 1 + t^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 4 On considère l'équation différentielle

$$(E) : \ x(x+1)y' + y = \arctan(x)$$

1. Donner les solutions réelles de (E) sur l'intervalle $K =]0, +\infty[$.
2. Préciser les solutions réelles de (E) sur les intervalles $I =]-\infty, -1[$ et $J =]-1, 0[$.

Problèmes de raccord

Exercice 5 On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : \ ty' - 2y = t^3$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$
3. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(1) = 0$.

Exercice 6 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations non normalisées suivantes

1. $(1-x)y' + y = \dfrac{x-1}{x}$
2. $y'\cos x + y\sin x = 1$

Equations différentielles linéaires du second ordre

Exercice 7 Donner les solutions réelles et complexes des équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 2y' + 2y = 2x$
2. $y'' + y = x^2 + 1$
3. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2$

Exercice 8 Donner les solutions réelles et complexes des équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y' + y = e^x$
2. $y'' + 2y' + y = xe^x$
3. $y'' + y' - 2y = (x^2+1)e^x$
4. $y'' + 2y' + 2y = \mathrm{sh}(x)$
5. $y'' - 6y' + 9y = x\,\mathrm{ch}(x)$

Exercice 9 Donner les solutions réelles et complexes des équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y' - 2y = \sin(2x)$
2. $y'' - y = \cos(x)$
3. $y'' + y' - y = x\sin(x)$
4. $y'' + 2y' + y = 2\cos^2(x)$
5. $y'' + 2y' + 3y = x\,\mathrm{e}^x\sin(x)$

Exercice 10 Déterminer l'unique fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui vérifie

$$(E) = \ y'' - 2(1+i)y' + 2iy = t + i, \qquad \text{avec} \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Exercice 11 Déterminer l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 13y = (12x+8)\cos(x) + (4x+2)\sin(x)$$

Changement de fonction inconnue et changement de variable

Exercice 12 Equation de Bernoulli. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives de l'équation différentielle :

$$(1+x^2)y' = 4xy + 4x\sqrt{y}$$

Indication : Considérer la fonction $z = \sqrt{y}$.

Exercice 13 Equation de Ricatti. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas de l'équation différentielle :

$$y' + 3y + y^2 = 0$$

Indication : Considérer la fonction $z = \frac{1}{y}$.

Exercice 14 Equation d'Euler. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$$

Indication : Poser $x = e^t$.

Exercice 15 On considère l'équation différentielle

$$(L) : x^2y'' + 4xy' + (2+x^2)y = 0$$

1. Intégrer l'équation (L) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ en posant $u = x^2y$.
2. Existe-t-il des solutions de (L) sur $\mathbb{R}$?