Chapitre X : Calculs dans $\mathbb{R}$

I Ensembles de base

Rappels

Soient a un élément, E et F deux ensembles.

- On dit que a **appartient** à E, noté $a \in E$ si a est un élément de l'ensemble E.
- On dit que F est un **sous-ensemble** de E ou est contenu dans E ou encore est inclus dans E, noté $F \subseteq E$ ou $F \subset E$, si tous les éléments de F appartiennent à E : $\forall a \in F$, on a $a \in E$.
- $\{a\}$ désigne l'ensemble contenant uniquement l'élément a.
- L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est l'ensemble ne contenant aucun élément.

Remarque 1 :

1. Si on utilise le même verbe contenir « E contient a » et « E contient F » pour dire que $a \in E$ et $F \subseteq E$, il ne faut cependant pas confondre l'appartenance et l'inclusion. On ne dit pas que F appartient à E ni que a est inclus dans E.
2. Si $a \in E$ alors $\{a\} \subseteq E$ et réciproquement.
3. L'inclusion peut se formaliser de la façon suivante : $F \subseteq E$ si et seulement si pour tout $a \in F$, on a $a \in E$.
4. La négation de l'inclusion s'écrit $F \not\subseteq E$ et se traduit par l'existence d'UN élément $a \in F$ tel que $a \notin E$ (et non par le fait que tous les éléments de F ne sont pas dans E).
5. Dans la définition d'un ensemble, il est possible de répéter plusieurs fois le même élément ou de modifier la place des éléments sans changer la définition l'ensemble : $\{a, b, c, d\} = \{a, c, d, b\} = \{b, a, c, a, d, a, a\}$ est le même ensemble contenant les éléments a, b, c et d.

L'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres positifs permettant de dénombrer, défini par :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}.$$

L'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, est l'ensemble des entiers naturels et de leurs opposés :

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

L'ensemble des décimaux, noté $\mathbb{D}$, est l'ensemble des entiers relatifs divisés par une puissance de 10 :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{k}{10^p} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N} \right\}.$$

Il correspond à l'ensemble de nombre s'écrivant avec un nombre fini de chiffre derrière la virgule. Il est théoriquement moins utilisé que ses compères.
L'ensemble des rationnels, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des fractions d'entiers relatifs :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

L'ensemble des réels, noté $\mathbb{R}$, est un ensemble plus difficile théoriquement à construire (théorie hors programme). Intuitivement certains nombres que vous connaissez comme $\sqrt{2}$ ou π sont des nombres qui ne font pas partie des rationnels. Ils peuvent cependant être vus comme des limites de suites de rationnels. L'ensemble $\mathbb{R}$ est, pour le dire vite et de façon peu rigoureuse, l'ensemble des limites des suites de $\mathbb{Q}$ qui convergent.
L'ensemble des complexes, noté $\mathbb{C}$, est l'ensemble des couples de réels muni d'une multiplication particulière, voir le chapitre IV.

Remarque 2 :

1. Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ contiennent un nombre infini d'éléments.
2. Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont strictement emboités dans cet ordre :

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$$

Remarque 3 : Pour $\mathbb{K} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, on note $\mathbb{K}_+$ l'ensemble des nombres positifs ou nuls de $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}_-$ l'ensemble des nombres négatifs ou nuls de $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^*$ l'ensemble des nombres non nuls de $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}_+^*$ l'ensemble des nombres strictement positifs de $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}_-^*$ l'ensemble des nombres strictement négatifs de $\mathbb{K}$.

II L'ordre dans $\mathbb{R}$

II.1 Propriétés élémentaires de la relation $\leqslant$

Proposition II.1

La relation $\leqslant$ entre les réels est une relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ car elle vérifie les trois propriétés suivantes.

- **Réflexive** : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant x$.
- **Transitive** : pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \Rightarrow (x \leqslant z)$.
- **Antisymétrique** : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \Rightarrow (x = y)$.

Cette relation d'ordre est une relation d'ordre **total**.

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x \leqslant y)$ ou $(y \leqslant x)$.

Remarque 4 :

1. On dit que $(\mathbb{R}, \leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné. C'est aussi le cas pour $(\mathbb{N}, \leqslant)$, $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ ou $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ par exemple. Cependant l'ensemble $\mathbb{C}$ n'est pas totalement ordonné.
2. La relation $<$, définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x < y \Leftrightarrow (x \leqslant y \text{ et } x \neq y)$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas réflexive.
3. La relation $\geqslant$ est aussi une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.

Proposition II.2 (compatibilité de $\leqslant$ et $<$ avec les opérations $+$ et $\times$)

Soient x, y et λ trois réels.

1. Si $x \leqslant y$ alors $x + \lambda \leqslant y + \lambda$.
2. Si $x < y$ alors $x + \lambda < y + \lambda$.
3. Si $x \leqslant y$ et si $\lambda \geqslant 0$, alors $\lambda x \leqslant \lambda y$.
4. Si $x < y$ et si $\lambda > 0$, alors $\lambda x < \lambda y$.
5. Si $x \leqslant y$ et si $\lambda \leqslant 0$, alors $\lambda x \geqslant \lambda y$.
6. Si $x < y$ et si $\lambda < 0$, alors $\lambda x > \lambda y$.

Remarque 5 :

1. Ces propriétés sont élémentaires, vous devez les maitrisez parfaitement. Chacune des hypothèses est importante. Par exemple l'affirmation suivante « si $x < y$ et si $\lambda \geqslant 0$, alors $\lambda x < \lambda y$ » est FAUSSE!!
2. En cas de doute dans des manipulations d'inégalités, ramenez-vous toujours à l'une des propositions ci-dessus. Par exemple l'implication $(x \leqslant y \text{ et } x' \leqslant y') \Rightarrow (x + x' \leqslant y + y')$ est-elle vraie ? Oui car si $x \leqslant y$ alors $x + x' \leqslant x' + y$. Si de plus $x' \leqslant y'$ alors $x' + y \leqslant y + y'$. Par transitivité de la relation $\leqslant$, on obtient $x + x' \leqslant y + y'$.

Exemple 6 : Montrer que si $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}_+$ sont quatre réels positifs tels que $x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$ alors $xy \leqslant x'y'$. Donner un contre-exemple à cette propriété lorsque les réels ne sont pas supposés positifs.

Proposition II.3 (compatibilité de $\leqslant$ et $<$ avec l'inverse)

Soient x et y deux réels.

1. Si $0 < x \leqslant y$ alors $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y} > 0$.
2. Si $0 < x < y$ alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 0$.
3. Si $x \leqslant y < 0$ alors $0 > \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$.
4. Si $x < y < 0$ alors $0 > \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.
5. Si $x < 0 < y$ alors $\frac{1}{x} < 0 < \frac{1}{y}$.

Remarque 7 : Du fait du dernier point de cette proposition, il est faux d'affirmer que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$. Il vaut mieux affirmer que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition II.4 (compatibilité de $\leqslant$ avec le carré)

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ on a
$$x^2 \leqslant y^2 \quad \Leftrightarrow \quad -|y| \leqslant x \leqslant |y|.$$

II.2 Majorants,minorants

Définition II.5

Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie (i.e. sous-ensemble) de $\mathbb{R}$ et $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ deux réels.

- On dit que M majore A ou est **un majorant** de A si pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a
$$a \in A \quad \Rightarrow \quad a \leqslant M.$$
- On dit que m minore A ou est **un minorant** de A si pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a
$$a \in A \quad \Rightarrow \quad m \leqslant a.$$

Exemple 8 :

1. Le réel 12 est un majorant de l'intervalle $[0; 5[$.
2. Tout entier négatif ou nul est un minorant de $\mathbb{N}$.
3. Les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ n'admettent ni majorant ni minorant.

Définition II.6

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que A est **majorée** si et seulement si elle admet un majorant autrement dit si et seulement si
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in A, \quad a \leqslant M.$$
- On dit que A est **minorée** si et seulement si elle admet un minorant autrement dit si et seulement si
$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in A, \quad a \geqslant m.$$
- On dit que A est **bornée** si elle est minorée et majorée, autrement dit si et seulement si
$$\exists\,(m, M) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall a \in A, \quad m \leqslant a \leqslant M.$$

Exemple 9 :

1. Ecrire une assertion traduisant le fait qu'une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ n'est pas majorée.
2. Démontrer que $\mathbb{R}$ n'est pas majoré.

Définition II.7

Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un réel.

- On dit que a est **le maximum** de A, ou encore que a est le plus grand élément de A, noté $\max(A)$, si a est un majorant de A ET si $a \in A$:
$$a = \max(A) \quad \Leftrightarrow \quad a \in A \quad \text{ET} \quad \forall x \in A, \quad x \leqslant a.$$
- On dit que a est **le minimum** de A, ou encore que a est le plus petit élément de A, noté $\min(A)$ si a est un minorant de A ET si $a \in A$:
$$a = \min(A) \quad \Leftrightarrow \quad a \in A \quad \text{ET} \quad \forall x \in A, \quad x \geqslant a.$$

Remarque 10 :

1. Tout ensemble ayant un maximum est nécessairement majoré (par ce maximum en particulier).

2. Attention, tous les ensembles, même majorés, n'ont pas nécessairement de maximum. Par exemple $[0;1]$ admet pour maximum 1 et pour majorant tous les réels supérieurs ou égaux à 1. Mais l'ensemble $[0;1[$ n'a pas de maximum, bien qu'il soit majoré par tous les réels plus grand que 1.
3. Le maximum d'un ensemble A, s'il existe est unique. En effet si a et a' sont deux maximums de A, alors puisque a est un maximum, on sait que pour tout $x \in A$, $x \leqslant a$. En prenant $x = a' \in A$, on en déduit que $a' \leqslant a$. Inversement puisque a' est un maximum de A et que $a \in A$, on a $a \leqslant a'$ et donc $a = a'$.
4. Toutes les remarques ci-dessus ont leurs analogues pour le minimum.

Exemple 11 : Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$. Ecrire une assertion exprimant le fait que A ne possède pas maximum.

Exemple 12 :

1. Déterminer le minimum de $\{ x - \sin(x) \mid x \in \mathbb{R}_+ \}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$. Démontrer que $\{ S_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ est majorée.

II.3 Borne supérieure, borne inférieure

Définition II.8

Soit A un ensemble.

- On appelle **borne supérieure** de A, notée $\sup(A)$, le plus petit des majorants de A,

$$\sup(A) = \min \{ M \in \mathbb{R} \mid M \text{ majore } A \}.$$

- On appelle **borne inférieure** de A, notée $\inf(A)$, le plus grand des minorants de A,

$$\inf(A) = \max \{ m \in \mathbb{R} \mid M \text{ minore } A \}.$$

Remarque 13 : Puisque, lorsqu'elle existe dans $\mathbb{R}$, la borne supérieure est un minimum (celui de l'ensemble des majorants), nécessairement la borne supérieure est unique. De même la borne inférieure, lorsqu'elle existe, est le maximum des minorants et est donc unique.

Exemple 14 : Montrer que si a est le maximum de A, alors a est la borne supérieure de A.

Théorème II.9

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un maximum.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un minimum.

Démonstration. Commençons par montrer que toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un minimum. Soit A une partie non vide de $\mathbb{Z}$ possédant un minorant. Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall a \in A, \qquad n_0 \leqslant a.$$

Par contraposée pour tout $n < n_0$, on a $n \notin A$.
Procédons par l'absurde et supposons que A n'admet aucun minimum. Posons pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$: « $n \notin A$ ». Montrons par récurrence forte que pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Initialisation. Si $n = n_0$. Par hypothèse, n_0 est un minorant de A et A n'admet pas de minimum. Donc $n_0 \notin A$ et $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \geqslant n_0$. Supposons que pour tout $k \in [\![n_0; n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vraie. On a vu que pour tout $k < n_0$, $k \notin A$ et par hypothèse de récurrence pour tout $k \in [\![n_0; n]\!]$, $k \notin A$. Donc pour tout $k \leqslant n$, $k \notin A$. Autrement dit pour tout $k \in A$, on a $k > n$ et donc pour tout $k \in A$, $k \geqslant n+1$. Donc $n+1$ est un minorant de A. Or A n'admet pas de minimum donc $n+1 \notin A$. Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion, pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie i.e. $n \notin A$. Or on a vu aussi que pour tout $n < n_0$, $n \notin A$. Donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n \notin A$ et A est donc vide ce qui est contradictoire. Conclusion, toute partie minorée de $\mathbb{Z}$ admet un minimum.
Montrons maintenant le premier point. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$. Posons

$$B = \{ -a \in \mathbb{Z} \mid a \in A \}.$$

Alors, on note que B est bien une partie de $\mathbb{Z}$. Puisque A est non vide, il existe $n_0 \in A$ et donc $-n_0 \in B$ et donc B est non vide. Enfin, comme A est majorée :

$$\exists M \in \mathbb{Z},\ \forall a \in A, \qquad a \leqslant M.$$

Soit $b \in B$. Alors, il existe $a \in A$ tel que $b = -a$. Par l'assertion précédente, on a $-a \geqslant -M$. Ceci étant vrai pour b quelconque, on en déduit que $-M$ est un minorant de B. Donc B est non vide et minorée donc admet un minimum.

$$\exists b_0 \in B,\ \forall b \in B, \qquad b_0 \leqslant b.$$

Puisque $b_0 \in B$, il existe $a_0 \in A$ tel que $b_0 = -a_0$. De plus, pour tout $a \in A$, on a $-a \in B$ et donc $-a \geqslant b_0 = -a_0$ et donc $a \leqslant a_0$. Ceci étant vrai pour tout $a \in A$, a_0 est donc un majorant et $a_0 \in A$ donc a_0 est un maximum de A. □

Théorème II.10 (admis)

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Remarque 15 : Ce théorème se démontre à l'aide de notions hors programme permettant la construction de $\mathbb{R}$. Notez que cette propriété est fausse dans $\mathbb{Q}$, où par exemple l'ensemble $\left\{ r \in \mathbb{Q} \mid r^2 \leqslant 2 \right\}$ est non vide, majoré mais n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 16 : Démontrer le second point du théorème à l'aide du premier point.

Remarque 17 : Par convention, si A n'est pas majorée alors $\sup(A) = +\infty$ et si A n'est pas minorée, $\inf(A) = -\infty$.

Exemple 18 : On a $\sup([0;1[) = \sup([0;1]) = 1$.

Proposition II.11 (Caractérisation de la borne supérieure)

Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un réel. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. Le réel a est la borne supérieure de A
2. Le réel a est un majorant de A et pour tout $\varepsilon > 0$, le réel $a - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A.
3. Le réel a est un majorant de A et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $a - \varepsilon < x$.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) : si $a = \sup(A)$ alors par définition a est le plus petit majorant de A. C'est donc bien un majorant de A. De plus pour tout $\varepsilon > 0$, $a - \varepsilon < a$. Le réel $a - \varepsilon$ est donc strictement plus petit que le plus petit des majorants et n'est donc pas un majorant.
(2) $\Leftrightarrow$ (3) : il s'agit juste de formaliser le fait que $a - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A. Or M est un majorant de A si et seulement si $\forall x \in A,\ x \leqslant M$. Par négation de cette affirmation, on obtient que $a - \varepsilon$ n'est pas un majorant si et seulement $\exists x \in A,\ x > a - \varepsilon$.
(3) $\Rightarrow$ (1) : soit a un majorant de A tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $a - \varepsilon < x$. Pour montrer que a est la borne supérieure de A, on va montrer qu'il est le plus petit des majorants. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que M soit un majorant de A et tel que $M < a$. Puisque $\varepsilon = a - M > 0$, on sait par hypothèse qu'il existe $x \in A$ tel que $M = a - \varepsilon < x$ ce qui contredit le fait que M soit un majorant c'est-à-dire le fait qu'il soit plus grand que tous les éléments de A et notamment de x. □

Proposition II.12 (Caractérisation de la borne inférieure)

Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un réel. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. Le réel a est la borne inférieure de A
2. Le réel a est un minorant de A et pour tout $\varepsilon > 0$, le réel $a + \varepsilon$ n'est pas un minorant de A.
3. Le réel a est un minorant de A et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $x < a + \varepsilon$.

Exemple 19 : Soit A et B deux parties non vide et majorées de $\mathbb{R}$. On pose

$$A + B = \{ a + b \mid a \in A,\ b \in B \}.$$

1. Montrer que $A + B$ est majorée.
2. Montrer que $\sup(A + B) \leqslant \sup(A) + \sup(B)$
3. Montrer par l'absurde que $\sup(A + B) \geqslant \sup(A) + \sup(B)$.
4. Conclusion ?

II.4 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition II.13

Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. L'ensemble I est **un intervalle** de $\mathbb{R}$ si pour tout $(a,b) \in I^2$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$a \leqslant x \leqslant b \quad \Rightarrow \quad x \in I.$$

Remarque 20 :

1. L'ensemble $\mathbb{R}^*$ par exemple n'est pas un intervalle car $(-1,1) \in (\mathbb{R}^*)^2$ et $-1 \leqslant 0 \leqslant 1$, pourtant $0 \notin \mathbb{R}^*$. L'ensemble $\mathbb{R}^*$ est la réunion de deux intervalles, deux demi-droites ouvertes : $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
2. La définition d'un intervalle I peut également s'écrire également de la forme suivante : $\forall (a,b) \in I^2$, on a $[a;b] \subseteq I$.

Classification des intervalles de $\mathbb{R}$

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont :

- l'ensemble vide $\emptyset$,
- l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier,
- les singletons $\{a\}$, avec $a \in \mathbb{R}$ un réel,
- les segments $[a;b]$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$, définis par
$$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\},$$
- les intervalles ouverts $]a;b[$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$, définis par
$$]a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$
- les intervalles semi-ouverts ou semi-fermés $]a;b]$ et $[a;b[$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$, définis respectivement par
$$]a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\} \qquad \text{et} \qquad [a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\},$$
- les demi-droites fermées $[a;+\infty[$ ou $]-\infty;a]$, avec $a \in \mathbb{R}$, définies respectivement par
$$[a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\} \qquad \text{et} \qquad]-\infty;a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\},$$
- les demi-droites ouvertes $]a;+\infty[$ ou $]-\infty;a[$, avec $a \in \mathbb{R}$, définies respectivement par
$$]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \qquad \text{et} \qquad]-\infty;a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}.$$

Démonstration. Il est facile de vérifier que tous les ensembles précédents sont des intervalles. Réciproquement, soit I un intervalle de $\mathbb{R}$,

- Si $I = \emptyset$, alors I est un intervalle. Supposons dans la suite que I est non vide.
- Si I n'est ni majoré ni minoré, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $(u,v) \in I^2$ tel que $u < x < v$. Puisque I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on en déduit que $x \in I$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{R} \subseteq I$. L'inclusion réciproque étant également vraie on a $I = \mathbb{R}$.
- Si I est borné, on note $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$. Si $a = b$ alors pour tout $x \in I$, $a \leqslant x \leqslant b = a$ et donc $x = a$. Ainsi $I \subseteq \{a\}$ et comme $I \neq \emptyset$, on en déduit que $I = \{a\}$.
Supposons maintenant I, non vide, non réduit à un singleton i.e. $a \neq b$ et borné. Montrons que $]a;b[\subseteq I$. Soit $x \in]a;b[$. Puisque $x > a$, et que, par définition de la borne inférieure a est le plus grand des minorants de I, on en déduit que x n'est pas un minorant de I. Donc il existe $a' \in I$ tel que $x \geqslant a'$. De même, $x \leqslant b$ et b est le plus petit des majorants. Donc il existe $b' \in I$ tel que $x \leqslant b'$. Ainsi on a
$$a' \leqslant x \leqslant b' \qquad (a',b') \in I^2.$$
Or l'ensemble I est un intervalle donc $x \in I$. Tout élément de $]a;b[$ est donc dans I :
$$]a;b[\subseteq I.$$
De plus, a étant un minorant de I et b un majorant de I, pour tout $x \in I$, on a $a \leqslant x \leqslant b$ donc $I \subseteq [a;b]$. Ainsi
$$]a;b[\subseteq I \subseteq [a;b].$$
i) Si $(a,b) \in I^2$, alors $I = [a;b]$.
ii) Si $a \in I$ et $b \notin I$, alors $I = [a;b[$.
iii) Si $a \notin I$ et $b \in I$, alors $I =]a;b]$.
iv) Si $a \notin I$ et $b \notin I$, alors $I =]a;b[$.

- Si I est majoré mais non minoré respectivement si I est minoré et non majoré, en appliquant les mêmes arguments que précédemment on en déduit que $I =]-\infty; a[$ ou $I =]-\infty; a]$ respectivement que $I =]a; +\infty[$ ou $I = [a; +\infty[$.

$\square$

III Opérateurs réels

III.1 Partie entière

Proposition III.1 (Propriété d'Archimède)

Le corps $\mathbb{R}$ est archimédien, c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N}, \qquad n\,\varepsilon > y.$$

Démonstration. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\,\varepsilon \leqslant y$. Donc y est un majorant de l'ensemble $A_\varepsilon = \{n\,\varepsilon \mid n \in \mathbb{N}\}$. Notons que $\varepsilon \in A_\varepsilon$ et donc l'ensemble A_ε est un ensemble non vide et majoré par y. D'après le Théorème II.10, on sait donc que A_ε admet une borne supérieure, notons-la a. Le réel a est un majorant de A_ε donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\,\varepsilon \leqslant a$ ou encore pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)\,\varepsilon \leqslant a$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\,\varepsilon \leqslant a - \varepsilon$. Donc $a - \varepsilon$ est un majorant de A_ε strictement (car $\varepsilon > 0$) plus petit que a, la borne supérieure de A ce qui est impossible. D'où le résultat.

$\square$

« Il y a des choses qui paraissent incroyables à la plupart des personnes qui n'ont pas étudié les mathématiques. »

Archimède.

Corollaire III.2

Pour tout $x \in]1; +\infty[$ et tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$x^n > y.$$

Démonstration. Si $y \leqslant 0$, le résultat est immédiat avec $n = 0$ ou $n = 1$. Supposons $y > 0$. Alors $y' = \ln(y) \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon = \ln(x) \in \mathbb{R}_+^*$. Donc par la propriété d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\,\varepsilon > y' \quad \Leftrightarrow \quad n\ln(x) = \ln(x^n) > \ln(y)$. Par la stricte croissance de la fonction logarithme, on en déduit que $x^n > y$.

$\square$

Définition III.3

Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel, il existe un unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leqslant x < n + 1.$$

L'entier n est appelé la **partie entière** de x, notée $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.

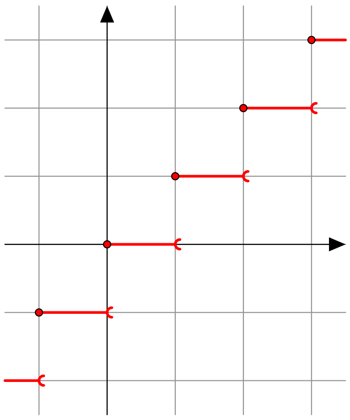
Démonstration. *Unicité.* Soit n_1 et n_2 deux entiers relatifs tels que $n_1 \leqslant x < n_1 + 1$ et $n_2 \leqslant x < n_2 + 1$. En particulier $n_1 \leqslant x < n_2 + 1$ et donc $n_1 - n_2 < 1$. Puisque $n_1 - n_2$ est un entier relatif, on en déduit que $n_2 - n_1 \leqslant 0$. Par le même raisonnement en échangeant les rôles de n_1 et n_2, on montre que $n_1 - n_2 \leqslant 0 \ \Leftrightarrow\ n_2 - n_1 \geqslant 0$. Ainsi $n_1 - n_2 = 0$ et $n_1 = n_2$.
Existence. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $A_x = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$.
Si $x \geqslant 0$, alors $0 \in A_x$ et A_x est un ensemble non vide. De plus en utilisant la propriété d'Archimède, on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \times 1 > x$ et par suite pour tout $n \geqslant n_0$, $n > x$ et donc $n \notin A_x$. Par contraposée, $n \in A_x \ \Rightarrow\ n < n_0$. Donc A_x est majoré n_0. Ainsi l'ensemble A_x est donc un ensemble non vide ($0 \in A_x$) et majoré (par n_0) de $\mathbb{Z}$. L'ensemble A_x admet donc un maximum, notons-le p. Par définition de A_x, $p \in A_x$ et donc $p \leqslant x$ et puisque $p + 1$ est strictement plus grand que p le maximum de A_x, on sait que $p + 1 \notin A_x$, c'est-à-dire $x < p + 1$.
Si $x \leqslant 0$, alors A_x est directement majoré par 0. De plus, par la propriété d'Archimède, on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $-x < n_0 \ \Leftrightarrow -n_0 < x$. Donc $-n_0 \in A_x$ et A_x est non vide. Ainsi l'ensemble A_x est un ensemble non

vide ($-n_0 \in A_x$) et majoré (par 0) de $\mathbb{Z}$ et donc admet un maximum. Notons-le p. De même que précédemment, $p \leqslant x < p+1$.

□

Proposition III.4

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\lfloor k \rfloor = k$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et tout $x \in \mathbb{R}$, $k \leqslant x \Rightarrow k \leqslant \lfloor x \rfloor$.
4. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$, constante sur tous les $[k; k+1[$, $k \in \mathbb{Z}$ et discontinue en chaque point de $\mathbb{Z}$.



Exercice 21 : Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.

Exercice 22 : Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$.

III.2 Densité dans $\mathbb{R}$

Proposition III.5

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre décimal $d_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ vérifie

$$d_n \leqslant x < d_n + \frac{1}{10^n}.$$

Le nombre d_n est appelé **approximation décimale** par défaut de x et $d_n + \frac{1}{10^n}$ l'approximation décimale par excès de x.

Démonstration. Par définition de la partie entière, $\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$. En divisant par 10^n, on obtient le résultat souhaité.

□

Exemple 23 : Voici quelques approximations décimales par défaut de constante. On note c la vitesse de la lumière et h la constante de Planck.

	π	e	$c \times 10^{-8}$ $(m.s^{-1})$	$h \times 10^{34}$ $(kg.m^2 s^{-1})$
à 10^0	3	2	2	6
à 10^{-1}	$3,1$	$2,7$	$2,9$	$6,6$
à 10^{-2}	$3,14$	$2,71$	$2,99$	$6,62$
à 10^{-3}	$3,142$	$2,719$	$2,997$	$6,626$

Remarque 24 : La proposition III.5 affirme qu'il est possible d'approcher d'aussi près que l'on veut tout réel par un nombre décimal. La proposition suivante en est une reformulation d'un tel résultat.

Proposition III.6

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x < y$, il existe $d \in \mathbb{D}$ tel que $d \in]x;y[$.

Démonstration. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x < y$. Puisque $10 \in]1;+\infty[$, d'après le corollaire III.2, on sait qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^n > \frac{1}{y-x}$ ($y \neq x$ car $y > x$). Donc $\frac{1}{10^n} < (y-x)$. Maintenant d'après la proposition III.5, on sait également qu'il existe $d_{n+1} \in \mathbb{D}$ tel que $d_{n+1} \leqslant x < d_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}}$. On pose $d = d_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}}$. Il est clair que $d \in \mathbb{D}$. D'une part, on a $x < d$. D'autre part on a $d = d_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}} \leqslant x + \frac{y-x}{10}$. Comme $y - x > 0$, on a $\frac{y-x}{10} < y - x$. Donc $d < x + y - x = y$. Ainsi $d \in]x;y[$.

□

Corollaire III.7

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x < y$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $r \in]x;y[$ et $\alpha \in]x;y[$.

Démonstration. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x < y$. D'après la proposition précédente, il existe $d \in]x;y[$. Donc $r = d \in \mathbb{Q}$ convient comme rationnel. Puisque $x' = x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} = y'$, on sait qu'il existe $r' \in \mathbb{Q}$ tel que $x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2}$. Posons $\alpha = r + \sqrt{2}$. Il est clair que $\alpha \in]x;y[$. Supposons que $\alpha \in \mathbb{Q}$, alors par stabilité de $\mathbb{Q}$ par addition, $\alpha - r = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ce que l'on sait être faux. Donc $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

□

III.3 La valeur absolue

Définition III.8

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **valeur absolue** de x le réel positif, noté $|x|$ et défini par

$$|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

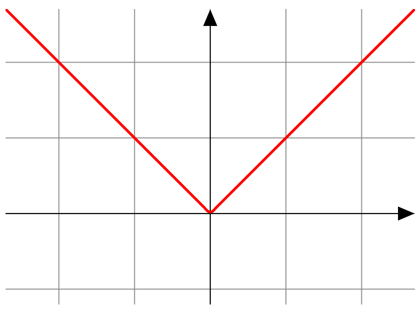
Proposition III.9

Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $h \in \mathbb{R}_+$.

1. $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$
2. $|x| = |y| \quad \Leftrightarrow \quad x = y$ ou $x = -y$.
3. $|x| \geqslant x$.
4. $|xy| = |x|\,|y|$.

Démonstration. Exercice !

□



Proposition III.10 (Inégalité triangulaire)

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$||x| - |y|| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|\,.$$

C'est un cas particulier de l'inégalité triangulaire complexe.

Définition III.11

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **distance** entre x et y, noté $d(x, y)$ le réel positif définit par

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Proposition III.12

Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $h \in \mathbb{R}_+$.

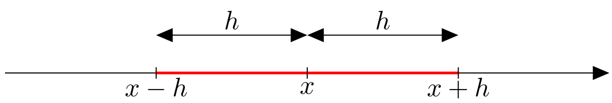
1. $d(x, y) \geqslant 0$ et $d(x, y) = d(y, x)$
2. $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$
3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y).$
4. $d(x, 0) \leqslant h \quad \Leftrightarrow \quad -h \leqslant x \leqslant h.$
5. $d(x, y) \leqslant h \quad \Leftrightarrow \quad y - h \leqslant x \leqslant y + h \quad \Leftrightarrow \quad x - h \leqslant y \leqslant x + h.$

Démonstration. Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $h \in \mathbb{R}_+$.

1. $d(x, y) = |x - y| \geqslant 0$ et $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x).$
2. $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow |x - y| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$
3. $d(x, y) = |x - y| = |x - z - (y - z)| \leqslant |x - z| + |y - z| = d(x, z) + d(z, y).$
4. $d(x, 0) \quad \Leftrightarrow \quad |x - 0| = |x| \leqslant h \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant h \text{ et } -x \leqslant h \quad \Leftrightarrow \quad -h \leqslant x \leqslant h.$
5. $d(x, y) \leqslant h \quad \Leftrightarrow \quad |x - y| \leqslant h \quad \Leftrightarrow \quad -h \geqslant x - y \leqslant h \quad \Leftrightarrow \quad y - h \leqslant x \leqslant y + h \quad \Leftrightarrow \quad x - h \leqslant y \leqslant x + h.$

□

Représentation géométrique.



Exercice 25 : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$, $I_a = [a - \varepsilon; a + \varepsilon]$ et $I_b = [b - \varepsilon; b + \varepsilon]$. Décrire $I_a \cap I_b$.

Proposition III.13

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. L'ensemble A est borné.
2. Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in A$, $|x| \leqslant M$.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2). Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$. Par définition, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$, $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$. Posons $M = \max(\beta, -\alpha) \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in A$, $x \leqslant \beta \leqslant M$ et $-x \leqslant -\alpha \leqslant M$. Donc pour tout $x \in A$, on a $|x| \leqslant M$. Notez que M est bien positif car supérieur à des valeurs absolues.
(2) $\Rightarrow$ (1). Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in A,\ |x| \leqslant A$. On a pour tout $x \in A$, $-M \leqslant x \leqslant M$. Donc la partie A est majorée par M et minorée par $-M$.

□

IV Résolution de systèmes linéaires

IV.1 Vocabulaire et opérations élémentaires

Définition IV.1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ deux entiers naturels non nuls, $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}$ et $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet d'éléments de $\mathbb{R}$. On appelle **système linéaire de n équations à p inconnues** $x_1, x_2, \dots, x_p$ tout système (S) défini par

$$(S)\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,j}x_j + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 & L_1 \\ \quad\vdots & \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,j}x_j + \cdots + a_{i,p}x_p = b_i & L_i \\ \quad\vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,j}x_j + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n & L_n \end{cases}$$

Vocabulaire :

- Les nombres $a_{i,j}$ pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, sont appelés les **coefficients** du système (S).
- Le vecteur colonne $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ est appelé le **second membre** de (S). Si tous les coefficients b_i sont nuls, le système est dit homogène et possède alors toujours une solution évidente, laquelle ?
- Les x_j pour $j \in [\![1,p]\!]$ sont les **inconnues** du système (S).
- Les équations L_i pour $i \in [\![1,n]\!]$ sont les **lignes** ou les **équations** du système (S).
- Une **solution** du système (S) est un p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ de $\mathbb{K}^p$ vérifiant les p équations de (S).

Définition IV.2

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et (S) un système linéaire à n équations et p inconnues. Soient $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $i \neq j$. On appelle opération élémentaire sur les lignes du système (S), l'une des opérations suivantes.

- **(Permutation)** On peut échanger les lignes L_i et L_j. On note alors $L_i \leftrightarrow L_j$.
- **(Dilatation)** On peut multiplier la ligne L_i par une constante NON NULLE $\lambda \in \mathbb{K}*$. On note alors $L_i \leftarrow \lambda L_i$
- **(Transvection)** On peut ajouter à la ligne L_i un multiple de la ligne L_j. On note alors $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Théorème IV.3

Deux systèmes (S) et (S') sont équivalents et ont le même ensemble solution si l'on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires. On note alors $(S) \Leftrightarrow (S')$.

Exemple 26 : Soit $(S) : \begin{cases} 2x + y - z + t = 0 \\ x + 2y + z + 3t = 1 \\ 3x - 3y + 9z - 3t = -3 \end{cases}$. Voici des exemples d'opérations élémentaires :

- Echange des lignes 1 et 2 :

$$\begin{cases} 2x + y - z + t = 0 \\ x + 2y + z + 3t = 1 \\ 3x - 3y + 9z - 3t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ 2x + y - z + t = 0 \\ 3x - 3y + 9z - 3t = -3 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

- Multiplication de la ligne 3 par $\frac{1}{3}$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ 2x + y - z + t = 0 \\ x - y + 3z - t = -1 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3$$

- Soustraction à la ligne 2 de 2 fois la ligne 1 :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z+3t=1 \\ -3y-3z-5t=-2 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ x-y+3z-t=-1 \end{cases}$$

A l'aide de ces opérations, on va passer d'un système linéaire quelconque à un système échelonné :

Définition IV.4

Un système est dit **échelonné en lignes** si

1. une ligne nulle du système implique que toutes les lignes suivantes sont nulles,
2. chaque ligne non nulle commence par davantage de 0 que la ligne précédente.

Définition IV.5

Soit (S) un système échelonné. Le premier coefficient non nul de chaque ligne (non entièrement nulle) est appelé **un pivot** du système (S).

Exemple 27 : Voici des exemples de systèmes échelonnés :

1. $\begin{cases} \boxed{1}x & +2y & -z & +2t & =4 \\ & \boxed{-1}y & +2z & & =3 \\ & & & \boxed{5}t & =1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \boxed{5}x & +y & +2t & -u & =-2 \\ & & & \boxed{2}u & =3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \boxed{5}x & +y & & 2t & -u & =-2 \\ & \boxed{1}y & +z & -t & +3u & =3 \\ & & \boxed{3}z & -2t & +5u & =6 \\ & & & \boxed{1}t & & =1 \\ & & & & \boxed{-1}u & =1 \\ & & & & 0 & =2 \end{cases}$

Voici des exemples de systèmes **non** échelonnés :

1. $\begin{cases} x & +2y & -z & +t & =4 \\ x & -y & & +2t & =3 \\ & & & 5t & =-2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x & +y & & +2t & -u & =-2 \\ & y & +z & +t & +u & =0 \\ & 2y & -z & +3t & -u & =1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x & +y & & 2t & -u & =-2 \\ & y & +z & -t & +3u & =3 \\ & & 3z & -2t & +5u & =6 \\ & & z & +t & & =1 \\ & & & 2t & & =-1 \end{cases}$

IV.2 Algorithme du pivot de Gauss

On cherche à résoudre le système (S) suivant :

$$(S) : \begin{cases} 3y+2z+2t=1 \\ 2x+4y+6z=2 \\ x-y+2z-t=3 \\ 5x+y+9z-2t=4 \end{cases}$$

1. On sélectionne dans la première colonne un coefficient non nul et on échange la ligne le contenant avec la première ligne :
$$(S) : \begin{cases} 3y+2z+2t=1 \\ 2x+4y+6z=2 \\ x-y+2z-t=3 \\ 5x+y+9z-2t=4 \end{cases} \underset{L_3\leftrightarrow L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 2x+4y+6z=2 \\ 3y+2z+2t=1 \\ 5x+y+9z-2t=4 \end{cases}$$
2. A l'aide de ce pivot, on annule les coefficients de la première inconnue dans les autres équations :
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 2x+4y+6z=2 \\ 3y+2z+2t=1 \\ 5x+y+9z-2t=4 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_4\leftarrow L_4-5L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 6y+2z+2t=-4 \\ 3y+2z+2t=1 \\ 6y-z+3t=-11 \end{cases}$$
3. On fixe ensuite la première ligne et on réitère avec la seconde inconnue, puis la troisième et ainsi de suite. On aboutit de proche en proche à un système échelonné :
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 6y+2z+2t=-4 \\ 3y+2z+2t=1 \\ 6y-z+3t=-11 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow \frac{L_2}{2}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 3y+z+t=-2 \\ 3y+2z+2t=1 \\ 6y-z+3t=-11 \end{cases} \underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-L_2 \\ L_4\leftarrow L_4-2L_2}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 3y+z+t=-2 \\ z+t=3 \\ -3z+t=-7 \end{cases}$$
$$\underset{L_4\leftarrow L_4+3L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 3y+z+t=-2 \\ z+t=3 \\ 4t=2 \end{cases}$$

Le système obtenu est échelonné et admet une unique solution. En effectuant une « remontée », on obtient :
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{19}{6} \\ y=-\dfrac{5}{3} \\ z=\dfrac{5}{2} \\ t=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

IV.3 Interprétation géométrique

Supposons que $p=2$. Si l'on rapporte le plan euclidien à un repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$:

- les équations L_i du système sont vues comme des équations de droites.
- les solutions du système (S) sont vues comme des points du plan.

Avec ces interprétations, les solutions du système (S) sont les éventuels points d'intersections des droites D_i ayant pour équation L_i et peuvent décrire une droite, un point ou l'ensemble vide.

Exemple 28 : Soit $(S) : \begin{cases} 2x+3y=1 \\ x-y=0 \end{cases}$. Notons D_1 la droite d'équation $2x+3y=1$ et D_2 la droite d'équation $x-y=0$. Les droites D_1 et D_2 ont un unique point d'intersection $P(1/5,1/5)$ qui est l'unique solution du système (S).

Exemple 29 : Soit $(S) : \begin{cases} 2x+3y=1 \\ x-y=0 \\ 5x+5y=2 \end{cases}$. Notons D_1 la droite d'équation $2x+3y=1$, D_2 la droite d'équation $x-y=0$ et D_3 celle d'équation $5x+5y=2$. Les droites D_1, D_2 et D_3 sont concourantes en $P(1/5,1/5)$. Le système admet le couple $(1/5,1/5)$ pour unique solution.

Exemple 30 : Soit (S) : $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ x-y=0 \\ -x+3y=1 \end{cases}$. Notons D_1 la droite d'équation $2x+3y=1$, D_2 la droite d'équation $x-y=0$ et D_3 celle d'équation $-x+3y=1$. Les droites D_1, D_2 et D_3 ne sont pas concourantes, le système n'admet pas de solutions.
D'autres situations sont possibles.

- On peut avoir n droites confondues. Dans ce cas il y a une infinité de solutions.
- On peut avoir n droites parallèles et distinctes. Dans ce cas il n'y a pas de solutions.

Supposons à présent que $p=3$. On rapporte cette fois-ci l'espace euclidien à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$:

- les équations L_i du système (S) sont vues comme des équations de plans.
- les solutions du système (S) sont vues comme des points de l'espace.

Avec ces interprétations, les solutions du système (S) sont les éventuels points d'intersections des plans P_i ayant pour équation L_i et peuvent décrire un plan, une droite, un point ou l'ensemble vide.

Exemple 31 : Soit (S) : $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ x-y+z=-2 \\ 3x-y-z=2 \end{cases}$. Notons P_1 le plan d'équation $x+y+z=-2$, P_2 le plan d'équation $x-y+z=-2$ et P_3 le plan d'équation $3x-y-z=2$. Ces trois plans sont concourants au point $M(0,0,-2)$, l'unique solution du système (S).

Exemple 32 : Soit (S) : $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ x-y+z=-2 \\ x+z=4 \end{cases}$. Notons P_1 le plan d'équation $x+y+z=-2$, P_2 le plan d'équation $x-y+z=-2$ et P_3 le plan d'équation $x+z=4$. Ces trois plans sont sécants deux à deux mais ne sont pas concourant : le système n'admet pas de solutions.
D'autres situations sont possibles.

- On peut avoir n plans sécants dont l'intersection forment une droite ; dans ce cas il y a une infinité de solution.
- On peut avoir n plans parallèles et distincts : dans ce cas il n'y a pas de solutions.
- On peut avoir n plans confondus ; dans ce cas il y a une infinité de solutions.

V Exemples de résolutions dans $\mathbb{R}$

V.1 Avec valeur absolue

Exemple 33 : Déterminer l'ensemble des $x\in\mathbb{R}$ tels que $\left|x^2-2x+3\right| = \left|-x^2+3x+2\right|$.

Exemple 34 : Déterminer l'ensemble des $x\in\mathbb{R}$ tels que $\left|x^2+x-3\right| \leqslant 4$.

Exemple 35 : Déterminer l'ensemble des $x\in\mathbb{R}$ tels que $|3x-2|+|x+1|+\left|x^2+x+1\right|=1$.

V.2 Avec racine carré

Exemple 36 : Déterminer l'ensemble des $x\in\mathbb{R}$ tels que $\frac{x}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x+1}} \geqslant 0$.

Exemple 37 : Déterminer l'ensemble des $x\in\mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x^2+x-4}=\sqrt{x-1}$.

Exemple 38 : Déterminer l'ensemble des $x\in\mathbb{R}$ tels que $\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \leqslant x-\frac{3}{2}$.

V.3 Avec système d'équations

Exemple 39 : Déterminer l'ensemble des couples $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$.

Exemple 40 : Déterminer l'ensemble des triplets $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tels que $\begin{cases} x-y+z=-1 \\ 2x+y-z=3 \\ x-3y+4z=0 \end{cases}$.

Exemple 41 : Déterminer l'ensemble des éléments $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 2x - 2y - z + 3t = 2 \\ y + z + t = 1 \end{cases}$.

VI Prochainement... Analyse asymptotique - Propriété des équivalents

Proposition VI.1 (Produits, puissances et inverse)

1. **Produit :**
   (a) *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n$ alors $u_n w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n t_n$
   (b) *Fonctions :* si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x\to a}{\sim} l(x)$ alors $f(x)h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)l(x)$.
2. **Produit par un scalaire non nul :** soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$,
   (a) *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda v_n$.
   (b) *Fonctions :* si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $\lambda f(x) \underset{x\to a}{\sim} \lambda g(x)$.
3. **Puissances :** soit $\alpha \in \mathbb{R}$
   (a) *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang alors $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$.
   (b) *Fonctions :* si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g$ et si f est strictement positive au voisinage de a alors $f(x)^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g(x)^\alpha$.
4. **Passage à l'inverse :**
   (a) *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang alors $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}$.
   (b) *Fonctions :* si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et si f ne s'annule pas au voisinage de a alors $\frac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{1}{g(x)}$.
5. **Passage à la valeur absolue :**
   (a) *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$.
   (b) *Fonctions :* si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $|f(x)| \underset{x\to a}{\sim} |g(x)|$.

Proposition VI.2 (Composition à droite / changement de variable)

Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$ et si $u(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ alors $f(u(x)) \underset{x\to a}{\sim} g(u(x))$.

Proposition VI.3 (Elimination des termes négligeables)

- *Suites :* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + w_n$ et si $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$
- *Fonctions :* si $f = g + h$ sur I et $h(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$

Anti-Proposition VI.4

1. **La somme.** L'assertion $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n \quad \Rightarrow \quad u_n + w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n + t_n$ est **FAUSSE** en général (de même pour les fonctions). Par exemple, $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $3-n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1-n$ mais $4 = (n+1)+(3-n)$ n'est pas équivalent à $n+(1-n) = 1$.
2. **La composition à gauche.** L'assertion $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad \Rightarrow \quad \varphi(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(g(x))$ est **FAUSSE** en général (de même pour les suites). Par exemple, $x \underset{x\to+\infty}{\sim} x+\ln(x)$ mais e^x n'est pas équivalent en $+\infty$ à $\mathrm{e}^{x+\ln(x)} = x\,\mathrm{e}^x$.

Exemple 42 : Déterminer un équivalent le plus simple possible.

1. $2x^4 - \sqrt{x} - x^2 + 12x \underset{x\to0}{\sim}$
2. $\left(2x^4 - \sqrt{x} - x^2 + 12x\right)^3 \underset{x\to0}{\sim}$
3. $\mathrm{e}^{-x} + 5 + \ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{\sim}$
4. $\left(x + \sqrt{x^5 + x^7}\right)\sin^2(x) \underset{x\to0}{\sim}$
5. $\sqrt{5n^3 - 2^n + n!} \underset{n\to+\infty}{\sim}$
6. $\ln\left(1 + x + x^2\right) \underset{x\to0}{\sim}$
7. $\sin\left(x + x^2\right) - x \underset{x\to0}{\sim}$
8. $\ln\left(1 + x + x^2 + x^3\right) \underset{x\to+\infty}{\sim}$

ARCHIMEDE *(Syracuse, environ 287 av. J.C. - Syracuse 212 av. J.C.) est, avec Euclide, le plus grand mathématicien de l'Antiquité. Fils de l'astronome Pheidias, il grandit à Syracuse puis fit un séjour à Alexandrie où il étudie auprès des successeurs d'Euclide. Il y rencontra probablement Eratosthène qu'il tiendra plus tard au courant de ses découvertes. Le gouvernement de Syracuse demandait régulièrement conseil à Archimède tant sa maitrise à résoudre les problèmes théoriques et technique était réputée. Les inventions techniques d'Archimède, étayées par les lois physique qu'il découvrit, ont fasciné ses contemporains et ont fait de lui un personnage légendaire. Sa contribution aux mathématiques concerne l'arithmétique et la géométrie. Archimède attribut à Eudoxe la propriété d'Archimède.*

Lors de l'attaque de Syracuse (colonie grecque) par les romains, le général Marcellus ordonna à ses soldats de laisser la vie sauve au savant. La légende raconte que l'un d'entre eux entra chez Archimède pendant que celui-ci peu concerné par la bataille qui faisait rage étudiait une figure géométrique dessinée sur le sol sableux. Dérangé par l'irruption du soldat, Archimède lui demanda de se tenir à l'écart pour ne pas endommagé le graphique. Le soldat se sentant insulté tua Archimède.
L'histoire est probablement romancé, le soldat fut sans doute motivé par la richesse des instruments du savant. Les romains lui firent cependant une tombe en respectant sa volonté d'y inscrire une sphère incluse dans un cylindre.

« On se souviendra d'Archimède quand on aura oublié Eschyle, parce que les langues meurent, mais pas les idées mathématiques. Immortalité est sans doute un mot creux, mais un mathématicien a probablement plus de chances d'en jouir qu'un autre. »

Godfrey H. Hardy

Posons $x = 0,999999\ldots$. En multipliant par 10, on obtient que $10x = 9,999999\ldots$ et donc $9x = 10x - x = 9,999999\cdots - 0,999999\cdots = 9$. Finalement $x = 1$. Ce résultat est-il choquant ?

Théorème Ω

Le réel π est irrationnel.

Démonstration. Commençons par prouver le lemme suivant : $\frac{\text{cheval}}{\text{oiseau}} = \pi$. En effet, on a les égalités suivantes :

$$\frac{\text{cheval}}{\text{oiseau}} = \frac{\text{che} \times \text{va} \times \text{l}}{\text{oiseau}} = \frac{\text{l} \times \text{va} \times \text{che}}{\text{oiseau}} = \frac{\text{l} \times \text{vache}}{\text{oiseau}}.$$

Or on sait qu'une vache est une $\beta\pi$ tandis qu'un oiseau est une β l. Par conséquent,

$$\frac{\text{cheval}}{\text{oiseau}} = \frac{\text{l} \times \beta \times \pi}{\beta \times \text{l}} = \pi.$$

Or il est complètement irrationnel de vouloir mettre un cheval sur un oiseau. Donc π est bien irrationnel. □