Chapitre XII : Analyse Asymptotique

Dans tout ce paragraphe $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I un **intervalle** de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide i.e. ni vide ni un singleton. On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. On dit que I est un voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ si $a \in I$ ou $a = \sup(I)$ ou $a = \inf(I)$.

I Négligeabilité - Rappel

I.1 Définition

Définition I.1

- *Fonctions :* Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et f et $g \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$. On suppose que $\forall x \in I,\ g(x) \neq 0$. On dit que f est **négligeable** devant g en a, noté $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ ou encore $f(x) \underset{x \to a}{\ll} g(x)$ si et seulement si
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$
- *Suites :* Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \neq 0$. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **négligeable** devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, noté $u_n \underset{n \to +\infty}{=} o(v_n)$ ou encore $u_n \underset{n \to +\infty}{\ll} v_n$ si et seulement si
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

Remarque 1 : Il n'est pas indispensable de supposer g (ou $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$) jamais nul. Une définition plus formelle permet de traiter le cas où g (ou $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$) s'annule mais cette définition est bien plus lourde et souvent peu pratique pour notre usage. La voici : il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{K}$ telle que $\forall x \in I,\ f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ et telle que $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

Remarque 2 :

- Pour une suite la variable n tend **nécessairement** vers $+\infty$. Ce n'est pas forcément le cas pour les fonctions.
- Dans la définition de la négligeabilité pour les fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ n'est pas nécessairement un élément de I et peut même être égal à $\pm\infty$.
- La négligeabilité $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ est aussi parfois notée $f = o_a(g)$ ou $f(x) = o_{x \to a}(g(x))$.

Remarque 3 : IMPORTANT : on a toujours :

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x \to a}{=} o(1) \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = 0 \\ u_n \underset{n \to +\infty}{=} o(1) \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = 0. \end{aligned}$$

Exemple 4 :

1. $x^2 \underset{x \to +\infty}{=} o(x^4)$,
2. $x^4 \underset{x \to 0}{=} o(x^2)$,
3. $\dfrac{1}{x^2} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$,
4. $\dfrac{1}{x} \underset{x \to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
5. $x \underset{x \to +\infty}{=} o(\mathrm{e}^x)$.
6. $x \underset{x \to 0}{=} o(\mathrm{e}^x)$
7. $n \underset{n \to +\infty}{=} o(n^2)$,
8. $2^n \underset{n \to +\infty}{=} o(3^n)$,
9. $\dfrac{1}{n^2} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$,

Interprétation. Les petits o permettent de formaliser l'idée suivant laquelle les suites ou les fonctions en un point ont une « vitesse » de convergence et de comparer ces vitesses. Par exemple :

- Si deux fonctions f, g converge vers 0 en a et si $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$, on dira que la fonction f converge plus vite vers 0 que la fonction g en a.
- De même si deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 0, et si $u_n \underset{n \to +\infty}{=} o(v_n)$, on dira que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge plus vite vers 0 que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- A l'inverse, si deux fonctions f, g tendent vers $+\infty$ en a et si $f(x) \underset{x\to a}{=} o\left(g(x)\right)$, on dira que la fonction g tend plus vite vers $+\infty$ que la fonction f en a.
- De même, si deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$ et si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ on dira que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge plus vite vers $+\infty$ que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (notez l'inversion de la rapidité par rapport au cas de la convergence vers 0).

Attention ne confondez pas ordre de majoration et vitesse. Par exemple la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2n)_{n\in\mathbb{N}}$ est toujours plus grande que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ mais bien que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge « deux fois plus rapidement » que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est faux d'affirmer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\ll} u_n$. On dira plutôt que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont des vitesses de divergence comparables (à un facteur 2 près). Pour être négligeable il faut donc diverger/converger « *beaucoup* moins rapidement ».

I.2 Croissances comparées

Proposition I.2 (Croissances comparées)

Soient $A \in \mathbb{K}^*$, $(\alpha,\beta,a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4$, $(c,\gamma) \in]1;+\infty[^2$.

1. En $+\infty$, on a
$$0 \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{1}{\gamma^x} \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{1}{x^\beta} \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{1}{\ln^\alpha(x)} \underset{x\to+\infty}{\ll} A \underset{x\to+\infty}{\ll} \ln^a(x) \underset{x\to+\infty}{\ll} x^b \underset{x\to+\infty}{\ll} c^x \underset{x\to+\infty}{\ll} x^x.$$
2. En 0, on a
$$0 \underset{x\to 0}{\ll} x^\alpha \underset{x\to 0}{\ll} A \underset{x\to 0}{\ll} |\ln(x)|^a \underset{x\to 0}{\ll} \frac{1}{x^b}.$$
3. Pour les suites, on a
$$0 \underset{n\to+\infty}{\ll} \frac{1}{\gamma^n} \underset{n\to+\infty}{\ll} \frac{1}{n^\beta} \underset{n\to+\infty}{\ll} \frac{1}{\ln^\alpha(n)} \underset{n\to+\infty}{\ll} A \underset{n\to+\infty}{\ll} \ln^a(n) \underset{n\to+\infty}{\ll} n^b \ll c^n \underset{n\to+\infty}{\ll} n! \underset{n\to+\infty}{\ll} n^n.$$

Remarque 5 : Nul n'est négligeable devant la suite/fonction nulle.

Démonstration. Tout ces résultats sont des conséquences des limites connues de croissances comparées. Exemple : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{c^x} = \lim_{x\to+\infty} x^b\,\mathrm{e}^{-x\ln(c)}$. Or $-\ln(c) < 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{c^x} = \lim_{t\to-\infty} |t|^b\,\mathrm{e}^{\ln(c)t} = 0$ ce qui implique par définition que $x^b \underset{x\to+\infty}{=} o\left(c^x\right)$.

Seul l'encadrement du factoriel reste à démontrer.

- Montrons que $(c^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $c>1$, i.e. que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{c^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 en $+\infty$. Notez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n! \geqslant 1 > 0$. Il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $n_0 \geqslant c$ (prendre par exemple $\lfloor c\rfloor + 1$). Donc pour tout $n \geqslant n_0+1 \geqslant c$, on a
$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{c}{k} = \underbrace{\prod_{k=1}^{n_0} \frac{c}{k}}_{=A_{n_0}} \prod_{k=n_0+1}^{n} \frac{c}{k}.$$
Pour tout $k \geqslant n_0+1 \geqslant c$, on a $\frac{c}{k} \leqslant 1$. Donc, par positivité des termes manipulés, pour tout $n \geqslant n_0+1 \geqslant c$,
$$u_n \leqslant A_{n_0} \times \prod_{k=n_0+1}^{n} 1 = A_{n_0},$$
où $A_{n_0} = \prod_{k=1}^{n_0} \frac{c}{k}$ est un réel qui ne dépend que de n_0 et non de n. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 et majorée par A_{n_0} à partir de $n = n_0+1$. Soit $n \geqslant n_0+2$, on a alors
$$0 \leqslant u_n = u_{n-1} \times \frac{c}{n} \leqslant A_{n_0} \times \frac{c}{n}, \qquad \text{car } \frac{c}{n} > 0 \text{ et } u_{n-1} \leqslant A_{n_0}.$$
Donc par le théorème d'encadrement
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$
et donc $c^n = o\left(n!\right)$.

- Montrons maintenant que $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(n^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $n^n>0$ donc nous allons montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\frac{n!}{n^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Pour tout $n\geqslant 2$, on a

$$0\leqslant u_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}\leqslant\left(\prod_{k=2}^{n}1\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{n}.$$

Par le théorème d'encadrement, on en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ et donc $n!=o\left(n^n\right)$.

□

Proposition I.3

Soient $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$, $q<p$ alors

1. $x^q \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^p\right)$
2. $x^p \underset{x\to 0}{=} o\left(x^q\right)$
3. $n^q \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^p\right)$
4. $\frac{1}{n^p} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^q}\right)$

I.3 Propriétés algébriques des petits o

Exemple 6 : Transitivité et somme. On a les égalités asymptotiques suivantes :

1. $o\left(x^3\right)+o\left(x^2\right)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(x^3\right)$
2. $o\left(x^3\right)+o\left(x^2\right)\underset{x\to 0}{=}o\left(x^2\right)$
3. $o\left(\mathrm{e}^n\right)+o\left(n^{10}\right)+o\left(\mathrm{e}^{-n}\right)+o\left(\mathrm{e}^{2n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\mathrm{e}^{2n}\right)$
4. $o\left(\ln(x)\right)+o\left(x^{10}\right)+o\left(\mathrm{e}^{-x}\right)\underset{x\to 0}{=}o\left(\ln(x)\right)$
5. $o\left(\arctan(x)\right)+o\left(\sqrt{x}\right)+o\left(\ln(x)\right)+\ln(x)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\sqrt{x}\right)$
6. $o\left(\sin(x)\right)+o\left(1\right)+o\left(x^2\right)+x^4\underset{x\to 0}{=}o\left(1\right)$

Exemple 7 : Transitivité et somme. On a les égalités asymptotiques suivantes :

1. $o\left(3x+4^x+13+\cos(x)\right)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(4^x\right)$
2. $o\left(o\left(o\left(x^2\right)\right)\right)\underset{x\to 0}{=}o\left(x^2\right)$
3. $o\left(3n^4-\mathrm{e}^n+n!+2\right)\underset{n\to+\infty}{=}o\left(n!\right)$
4. $o\left(\frac{1}{\arctan(x)}+x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\underset{x\to 0}{=}o\left(\frac{1}{\arctan(x)}\right)$
5. $o\left(\ln\left(5x^2+4\right)+o\left(\mathrm{e}^x\right)+\mathrm{ch}(x)\right)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\mathrm{e}^x\right)$
6. $o\left(4x^2+o\left(\sqrt{x}\right)\right)+o\left(\ln\left(x+2\right)+\mathrm{e}^x\right)\underset{x\to 0}{=}o\left(1\right)$

Exemple 8 : Produit. On a les égalités asymptotiques suivantes :

1. $o\left(5x^2\right)o\left(-8x\right)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(x^3\right)$
2. $\frac{1}{x^5}o\left(x^2\right)\underset{x\to 0}{=}o\left(\frac{1}{x^3}\right)$
3. $4^n o\left(3^{-n}o\left(3\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n\right)$
4. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\, o\left(5x^3-7x+9\right)o\left(\sin\left(x^2\right)+2x\right)\underset{x\to 0}{=}\begin{cases}o\left(x\right) & \text{si } \lambda\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$
5. $o\left(x\ln(x)\right)o\left(\frac{1}{x^3}\right)o\left(o\left(4x\right)\right)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$
6. $o\left(5x+\mathrm{e}^{3x}\right)o\left(\sin(x)+\sqrt{x}\right)o\left(\arccos(x)+\arcsin(x)\right)\underset{x\to 0}{=}o\left(\sqrt{x}\right)$

Remarque 9 : Attention, $h\left(x\right)+o\left(g\left(x\right)\right)\neq o\left(h(x)+g(x)\right)$ et de même pour les suites.

Remarque 10 : L'objectif et la force de l'analyse asymptotique est de ne garder que l'information utile la plus concise du comportement de la fonction au voisinage du point considéré. On comparera alors nos fonctions avec des fonctions de références très simples (polynômes surtout et même monôme, exponentielle, logarithme...).

Remarque 11 : On a

- *Fonctions :* Si $f(x)\underset{x\to a}{=}o\left(g(x)\right)$ et $g(x)\underset{x\to a}{\to}0$ alors $f(x)\underset{x\to a}{\to}0$.
- *Suites :* Si $u_n\underset{n\to+\infty}{=}o\left(v_n\right)$ et $v_n\underset{n\to+\infty}{\to}0$ alors $u_n\underset{n\to+\infty}{\to}0$.
- *Fonctions :* Si $f(x)\underset{x\to a}{=}o\left(g(x)\right)$ et $f(x)\underset{x\to a}{\to}+\infty$ alors $g(x)\underset{x\to a}{\to}+\infty$.
- *Suites :* Si $u_n\underset{n\to+\infty}{=}o\left(v_n\right)$ et $u_n\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty$ alors $v_n\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty$.

Les réciproques sont fausses en général bien entendu !

Remarque 12 : Voici des manipulations importantes du petit o :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ (y compris 0), on a $o(x^n) \underset{x \to 0}{\to} 0$.
2. Soient $n, m \in \mathbb{Z}$ avec $m \leqslant n$. Si $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(x^m)$ alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(x^n)$.
3. Soient $n, m \in \mathbb{Z}$ avec $m \leqslant n$. Si $f(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^n)$ alors $f(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^m)$.

ATTENTION ! ! ! Les réciproques sont fausses en général. Méfiez-vous donc de l'égalité

$$o(x^m) \underset{x \to +\infty}{=} o(x^n),$$

qui, si $m \leqslant n$, est vraie en la lisant de gauche à droite mais qui est fausse si on la lit de droite à gauche ! ! !

II Les équivalents - Rappel

II.1 Définition

Définition II.1

- *Fonctions :* Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et f et $g \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$. On suppose que $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$. On dit que f est **équivalente** à g en a, noté $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ si et seulement si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

- *Suites :* Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **équivalente** à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, noté $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Remarque 13 : Nulle autre que la suite/fonction nulle est équivalente à la suite/fonction nulle. Il est INTERDIT d'écrire $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 0$ si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas la suite constante égale à 0 et INTERDIT d'écrire $f(x) \underset{x \to a}{\sim} 0$ si f n'est pas la fonction nulle. A bon entendeur...

Exemple 14 :

1. $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$,
2. $3^n + 2^n \underset{n \to +\infty}{\sim} 3^n$,
3. $x^2 + x + 5 \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$,
4. $x + x^2 \underset{x \to 0}{\sim} x$

II.2 Propriétés

Proposition II.2

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

1. $\sim$ est réflexive : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$.
2. $\sim$ est transitive : $\left[u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n \text{ et } v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} w_n\right] \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} w_n$.
3. $\sim$ est symétrique : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n \quad \Leftrightarrow \quad v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$.

De même, $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$.

Proposition II.3

- *Fonctions :* Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On a

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o\,(g(x)) \qquad \text{(ou encore } g(x) \underset{x\to a}{=} f(x) + o\,(f(x))\text{)}.$$

- *Suites :* Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On a l'équivalence suivante :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \qquad \Leftrightarrow \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(v_n) \qquad \text{(ou encore } v_n \underset{n\to+\infty}{=} u_n + o(u_n)\text{)}.$$

Remarque 15 :

- Attention $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ n'implique pas a priori que $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$! Par exemple : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{n}$ et $v_n = \sqrt{n} + \ln(n)$.
- La réciproque est aussi FAUSSE : si $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ cela n'implique pas que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Par exemple : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$.

Exemple 16 :

1. $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ i.e. $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + o\,(x)$
2. $\operatorname{ch}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$ i.e. $\operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{e^x}{2} + o\,(e^x)$
3. $n^3 + n \underset{n\to+\infty}{=} n^3 + o\left(n^3\right)$ i.e. $n^3 + n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$
4. $\arctan(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} + o\,(1)$ i.e. $\arctan(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$

Interprétation : La notion de suites (respectivement fonctions) équivalentes exprime donc le fait qu'au voisinage de $+\infty$ (au voisinage de a), l'écart relatif entre les termes u_n et v_n (i.e $\frac{u_n - v_n}{v_n}$) tend vers 0, (respectivement $\frac{f(x)-g(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} 0$). Intuitivement les deux suites (respectivement fonctions) ont alors la même « vitesse de convergence » en $+\infty$ (respectivement au voisinage de a). Attention, avoir le même comportement ne signifie pas nécessairement avoir le même graphe ni même des graphes qui se rapprochent.

Proposition II.4

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et f et g deux éléments de $\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$.

1. *Fonctions :*
   (a) Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ alors les fonctions f et g ont le même comportement au voisinage de a :
      - si l'une converge vers l l'autre aussi,
      - si l'une diverge (vers $\pm\infty$ ou diverge tout court), l'autre aussi.

   (b) Pour $l \in \mathbb{R}$ avec $l \neq 0$: $f(x) \underset{x\to a}{\to} l$ si et seulement si $f \underset{x\to a}{\sim} l$.

   (c) Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ alors les fonctions f et g ont le même signe au voisinage de a.
2. *Suites :*
   (a) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature au voisinage de $+\infty$:
      - si l'une converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$, l'autre aussi.
      - si l'une diverge (vers $\pm\infty$ ou diverge tout court), l'autre aussi.

   (b) Pour $l \in \mathbb{R}$ avec $l \neq 0$: $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$ si et seulement si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} l$.

   (c) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont à partir d'un certain rang le même signe.

Remarque 17 : Attention, l'assertion suivante est FAUSSE en général :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n \qquad \Rightarrow \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$.

Théorème II.5 (Théorème d'encadrement pour les équivalents)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et f, g, h trois éléments de $\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$.

1. *Fonctions :* Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$.
2. *Suites :* Si : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.

Démonstration. Démontrons le résultat sur les fonctions dans le cas où pour tout $x \in I$, $h(x) > 0$ (le cas pour tout $x \in I$, $h(x) < 0$ se traite de même, le cas général du signe quelconque, voire variable, est plus technique). Dans ce cas (et dans ce cas seulement)

$$\forall x \in I, \qquad \frac{f(x)}{h(x)} \leqslant \frac{f(x)}{h(x)} \leqslant 1.$$

Or $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, autrement dit, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{h(x)} = 1$. Donc par le théorème d'encadrement (le classique celui sur les limites), on en déduit que

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)} = 1 \qquad \text{i.e.} \qquad g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x).$$

Par transitivité, on a également $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.

□

II.3 Manipulation des équivalents

Exemple 18 : élimination des termes négligeables.

1. $x^3 - 18x^2 + 2\sqrt{x} + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$
2. $\mathrm{e}^n + n! + \cos(n) + \frac{n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$
3. $x^3 + x\arctan(x) + x\sqrt{x} + \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
4. $x\ln(x) + \mathrm{sh}(x) + \mathrm{e}^x + 4x^2 \underset{x\to 0}{\sim} 1$

Exemple 19 : produit, puissance, valeur absolue.

1. $(\ln(x) + 15)\left(\mathrm{e}^x + 3^x + x^3\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)\,\mathrm{e}^x$
2. $\sqrt{n^4 + 3n^2\ln(n) + \sin(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$
3. $\left|\sin(x) - 5x^3 + \mathrm{sh}^2(x)\right| \underset{x\to 0}{\sim} |x|$
4. $\frac{\left(x+\lfloor x\rfloor+4x^2\right)^2}{\left(\arctan(x)+\sqrt{x}\right)^{12}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{16}{x^2}$

Proposition II.6 (Changement de variable)

Si $f(u) \underset{u\to b}{\sim} g(u)$ et si $u(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ alors $f(u(x)) \underset{x\to a}{\sim} g(u(x))$.

Exemple 20 :

1. $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$
2. $\sin(1+x) \underset{x\to-1}{\sim} 1+x$
3. $\arcsin\left(\mathrm{e}^{-x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}$
4. $\mathrm{e}^{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln(x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^1$

Anti-Proposition II.7

1. **La somme.** L'assertion $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n \quad\Rightarrow\quad u_n + w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n + t_n$ est **FAUSSE** en général (de même pour les fonctions).
2. **La composition (à gauche).** L'assertion $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad\Rightarrow\quad \varphi(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(g(x))$ est **FAUSSE** en général (de même pour les suites).

Exemple 21 :

1. $n + \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $3 - n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$ mais $n + \sqrt{n} + 3 - n = \sqrt{n} + 3$ n'est pas équivalent à $n - n = 0$!
2. $x \underset{x\to+\infty}{\sim} x + \ln(x)$ mais e^x n'est pas équivalent en $+\infty$ à $\mathrm{e}^{x+\ln(x)} = x\,\mathrm{e}^x$.
3. $1 + x \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$ mais $\ln(1+x)$ n'est pas équivalent en 0 à $\ln(1) = 0$.

II.4 Equivalents usuels

Soient $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ avec $a_n \neq 0$, $(b_p, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n-p+1}$ avec $b_p \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k x^k \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$		$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \underset{x\to +\infty}{\sim} a_n x^n$
$e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$		$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$		$\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
$\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$		$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

$\operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$		$\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
$\arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$		$\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
$\operatorname{ch}(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \operatorname{sh}(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$		$\arctan(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$

Exemple 22 : Déterminer un équivalent (le plus simple possible), de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par

1. $u_n = \frac{n^2 - 2\ln(n) + 3}{n-1}$
2. $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$
3. $u_n = \ln\left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)$

III Développements limités

III.1 Définition

Définition III.1

Soient I un voisinage de 0 et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f admet **un développement d'ordre** n en 0, s'il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right)$$

Le polynôme $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est alors appelé **la partie régulière** du développement limité.

Remarque 23 :

1. Cela signifie qu'au voisinage de 0, la fonction f « se comporte comme » la fonction polynomiale $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ou encore que la fonction $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ constitue la meilleure approximation à l'ordre n de la fonction f. Plus l'ordre est important, meilleure sera l'approximation.
2. Naturellement cette approximation n'est valide a priori qu'au voisinage immédiat de 0 et ne présume rien de la fonction dès que l'on s'éloigne un peu de 0.

Exemple 24 :

1. Un polynôme possède un développement limité à n'importe quel ordre. Exemple $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 6$ on a $f(x) \underset{x\to 0}{=} -6 + 2x^2 + o\left(x^2\right)$ ou encore $f(x) \underset{x\to 0}{=} -6 + 2x^2 + 5x^3 + o\left(x^{27}\right)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o\left(x^n\right).$$

Démonstration. Soit $x \in]-1;1[$, on sait que
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$
c'est-à-dire
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$
Or
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x}{1-x} = 0.$$
Par conséquent, $\frac{x^{n+1}}{1-x} \underset{x\to 0}{=} o\left(x^n\right)$ et donc
$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o\left(x^n\right).$$
□

3. En prenant $-x$ dans l'exemple précédent, on obtient également pour tout $n \geqslant 1$,
$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o\left(x^n\right).$$

Définition III.2

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, I un voisinage de x_0 et f une fonction définie sur I. Alors la fonction $h \mapsto f(x_0+h)$ est définie sur $J = \{h \in \mathbb{R} \mid h + x_0 \in I\}$, un voisinage de 0. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en x_0 si la fonction $h \mapsto f(x_0+h)$ admet un développement limité d'ordre n en 0, c'est-à-dire s'il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que
$$f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n).$$
En posant $x = x_0 + h$, cette relation s'écrit aussi
$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

Remarque 25 : Pour calculer un développement limité en x_0, on peut toujours se ramener en 0. Les résultats du cours sont donc énoncés en 0 et on peut (sauf mention contraire) les adapter en x_0.

Exemple 26 : Donner le développement limité à l'ordre 3 en $x_0 = 2$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$.

III.2 Premières propriétés

Proposition III.3 (Unicité)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie au voisinage de 0. Supposons qu'il existe I un voisinage de 0 et des réels $a_0, \ldots, a_n$ et $b_0, \ldots, b_n$ tels que
$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$$
alors on a pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k = b_k$.

Démonstration. Procédons par l'absurde et supposons que $(a_0, \dots, a_n) \neq (b_0, \dots, b_n)$. Soit r le premier indice entre 0 et n tel que $a_r \neq b_r$. On obtient alors pour I un voisinage de 0

$$\begin{aligned}
& \forall x \in I, \quad a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o\left(x^n\right) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + o\left(x^n\right) \\
\Rightarrow \quad & \forall x \in I, \quad a_r x^r + a_{r+1} x^{r+1} + \dots + a_n x^n + o\left(x^n\right) = b_r x^r + b_{r+1} x^{r+1} + \dots + b_n x^n + o\left(x^n\right) \\
\Rightarrow \quad & \forall x \in I \setminus \{0\}, \quad a_r + a_{r+1} x + \dots + a_n x^{n-r} + o\left(x^{n-r}\right) = b_r + b_{r+1} x + \dots + b_n x^n + o\left(x^{n-r}\right)
\end{aligned}$$

Donc en soulignant le fait que $n - r \geqslant 0$ et en passant à la limite quand $x \to 0$, on obtient alors que

$$a_r = b_r,$$

ce qui contredit l'hypothèse initiale et achève la démonstration. □

Proposition III.4 (Troncature)

Soient $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, tel que $m \leqslant n$. Si f admet un développement limité d'ordre n en 0 alors elle admet un développement limité d'ordre m. Plus précisément, si

$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

est un développement limité d'ordre n de f alors

$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{m} a_k x^k + o(x^m)$$

est un développement limité d'ordre m de f.

Démonstration. Soit I un intervalle contenant 0 et f une fonction définie sur I telle que

$$\begin{aligned}
f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) & \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o\left(x^n\right) \\
& \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m + \underbrace{a_{m+1} x^{m+1} + \dots + a_n x^n + o\left(x^n\right)}_{=g(x)}.
\end{aligned}$$

De plus on remarque que

$$\frac{g(x)}{x^m} = \frac{a_{m+1} x^{m+1} + \dots + a_n x^n + o\left(x^n\right)}{x^m} = a_{m+1} x + \dots + a_n x^{n-m} + o\left(x^{n-m}\right) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, $g(x) \underset{x \to 0}{=} o\left(x^m\right)$ et on a bien $f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{m} a_k x^k + o(x^m)$. □

Proposition III.5

Attention, ce résultat n'est vrai qu'en 0.
Soit f une fonction admettant un développement limité en 0 d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de partie régulière $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

1. Si f est paire alors $P(x)$ ne contient que des puissances paires de x.
2. Si f est impaire alors $P(x)$ ne contient que des puissances impaires de x.

Démonstration. Soit f une fonction paire définie sur un intervalle I centré en 0 (et non réduit à $\{0\}$) ayant un développement limité en 0 d'ordre n : il existe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o\left(x^n\right) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right).$$

Puisque I est centré en 0, pour tout $x \in I$, on a $-x \in I$ et par conséquent, on a également

$$f(-x) \underset{x \to 0}{=} a_0 - a_1 x + \dots + (-1)^n a_n x^n + o\left((-1)^n x^n\right) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k + o\left((-1)^n x^n\right).$$

La fonction f est paire donc $\forall x \in I$, $f(-x) = f(x)$. De plus si n est pair, $(-1)^n x^n = x^n$ et si n est impair $o((-1)^n x^n) = o(-x^n) = o(x^n)$ (cf Proposition I.5). Dans tous les cas,

$$\forall x \in I, \qquad f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 - a_1 x + \cdots + (-1)^n a_n x^n + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k + o(x^n).$$

Donc par unicité du développement limité, on a pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $a_k = (-1)^k a_k$. Notamment si $k \in [\![1;n]\!]$ est impair, alors $a_k = -a_k$ et donc $a_k = 0$. Ceci démontre bien le premier point de la proposition. On procède de même pour le cas où f est impaire.

$\square$

Proposition III.6 (DL et continuité ou dérivabilité)

Soit f une fonction définie sur I un voisinage de 0 (éventuellement I est privé de 0).

1. La fonction f admet un développement limité d'ordre 0 en 0 **si et seulement si** f est continue en 0 (ou prolongeable par continuité si elle n'est pas définie en 0). Son développement limité est alors donnée par
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + o(1).$$
2. La fonction f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 **si et seulement si** f est dérivable en 0. Son développement limité est alors donnée par
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + o(x).$$
3. **Si** f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur un voisinage de 0 **alors** f admet un développement d'ordre n en 0.

Démonstration.

1. La fonction f admet un développement d'ordre 0 en 0 si et seulement si
$$\begin{aligned} & \exists I \text{ un voisinage de } 0,\ \exists a_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + o(1) \\ \Leftrightarrow\quad & \exists I \text{ un voisinage de } 0,\ \exists a_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad f(x) - a_0 \underset{x\to 0}{=} o(1) \\ \Leftrightarrow\quad & \exists a_0 \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to 0} f(x) - a_0 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \exists a_0 \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to 0} f(x) = a_0. \end{aligned}$$
La dernière assertion est la définition de la continuité de f en 0, ce qui démontre le premier point.
2. Si la fonction f admet un développement d'ordre 1 en 0 alors
$$\exists I \text{ un voisinage de } 0,\ \exists a_0, a_1 \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + o(x).$$
En particulier la fonction f admet un développement limité d'ordre 0 en 0 (cf la Proposition III.5) et d'après le premier point, f est continue en 0 et de plus $f(0) = a_0$. On a alors
$$\forall x \in I, \qquad f(x) - f(0) - a_1 x \underset{x\to 0}{=} o(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in I \setminus \{0\}, \qquad \frac{f(x) - f(0)}{x} - a_1 \underset{x\to 0}{=} o(1).$$
Par conséquent,
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} - a_1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = a_1.$$
Ainsi, on en déduit que la fonction f est dérivable en 0 et de plus $f'(0) = a_1$ et donc son développement limité est
$$\forall x \in I, \qquad f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + o(x).$$
Réciproquement, si f est dérivable en 0 alors par définition,
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0).$$

Par conséquent, il existe I un voisinage de 0 tel que

$$\forall x \in I, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x} \underset{x \to 0}{=} f'(0) + o(1)$$

ou encore tel que

$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x \to 0}{=} f'(0)x + xo(1) + f(0) = f(0) + f'(0)x + o(x).$$

Donc f admet bien un développement limité d'ordre 1 en 0.

3. Admis pour l'instant c'est un corollaire du Théorème de Taylor-Young que nous allons voir un peu plus tard dans le chapitre.

□

Contre-exemple. La réciproque du dernier point est faux en général. Si f admet un développement d'ordre n en 0, la fonction f n'est pas nécessairement de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de 0. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On a $x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc $x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x \to 0}{=} o(1)$. Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \underset{x \to 0}{=} x + x^2 o(1) \underset{x \to 0}{=} x + o\left(x^2\right).$$

Donc f admet un développement limité d'ordre 2 en 0. Cependant la fonction f n'est pas $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En effet, on sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = 1 + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\frac{x^3}{x^3} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1 - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

On remarque que f' n'admet pas de limite en 0 donc f n'est pas $\mathscr{C}^1$ malgré le fait qu'elle possède un développement limité d'ordre 2.

III.3 Développements limités usuels

Les fonctions suivantes sont $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 et admettent donc des développements limités de tout ordre. Soit $n \in \mathbb{N}$.

e^x	$\underset{x\to 0}{=}$	$1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o\left(x^n\right).$
$\mathrm{sh}(x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$x+\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right).$
$\mathrm{ch}(x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$1+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n}\right).$
$\sin(x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$x-\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right).$
$\cos(x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$1-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n}\right).$
$\arctan(x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+1}\right)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}+o\left(x^{2n+1}\right).$
$\frac{1}{1-x}$	$\underset{x\to 0}{=}$	$1+x+x^2+\cdots+x^n+o\left(x^n\right)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k+o\left(x^n\right).$
$\frac{1}{1+x}$	$\underset{x\to 0}{=}$	$1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+o\left(x^n\right)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o\left(x^n\right).$
$\ln(1+x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+o\left(x^n\right)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}+o\left(x^n\right).$
$\ln(1-x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$\displaystyle-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o\left(x^n\right).$

$(1+x)^\alpha$	$\underset{x\to 0}{=}$	$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$
$\tan(x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o\left(x^5\right)$

IV Manipulation des développements limités

IV.1 Somme et produit

Proposition IV.1 (somme et produit de DL)

Soient f et g deux fonctions ayant un développement limité d'ordre n en 0. Notons P et Q leurs parties régulières (ce sont donc des polynômes d'ordre au plus n) : pour tout $x \in I$, où I est un voisinage de 0,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad g(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^n).$$

1. La fonction $f+g$ admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par

$$\forall x \in I, \quad f(x) + g(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + Q(x) + o(x^n).$$

2. La fonction fg admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par

$$\forall x \in I, \quad f(x)g(x) \underset{x\to 0}{=} R(x) + o(x^n).$$

où R est le polynôme PQ tronqué à l'ordre n.

Démonstration. Supposons que pour tout $x \in I$, $f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n)$ et que pour tout $x \in I$, $g(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^n)$.

1. Alors, pour tout $x \in I$,

$$f(x) + g(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n) + Q(x) + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} P(x) + Q(x) + \underbrace{o(x^n) + o(x^n)}_{\ll x^n} \underset{x\to 0}{=} P(x) + Q(x) + o(x^n).$$

2. De plus, le polynôme PQ est de degré inférieur ou égal à $2n$: $PQ = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{2n}X^{2n}$. Si R est la troncature de ce polynôme à l'ordre n :

$$PQ(X) = R(x) + \alpha_{n+1}X^{n+1} + \cdots + \alpha_{2n}X^{2n}.$$

Alors, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &\underset{x\to 0}{=} P(x)Q(x) + \underbrace{P(x)o(x^n)}_{\ll x^n} + \underbrace{Q(x)o(x^n)}_{\ll x^n} + \underbrace{o(x^n)\,o(x^n)}_{\ll x^n} \\
&\underset{x\to 0}{=} P(x)Q(x) + \underbrace{o(x^n) + o(x^n) + o(x^n)}_{\ll x^n} \\
&\underset{x\to 0}{=} R(x) + \underbrace{\alpha_{n+1}x^{n+1} + \cdots + \alpha_{2n}x^{2n} + o(x^n)}_{\ll x^n} \\
&\underset{x\to 0}{=} R(x) + o(x^n).
\end{aligned}$$

□

Exemple 27 :

1. Calculons un $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \mathrm{e}^x$. La fonction f est définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$. De plus pour tout $x \in]-\infty;1[$, on a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \left(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + o(x^3).$$

ATTENTION ! Les petits o ne disparaissent pas !

2. Calculons un $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction $g : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+x}}$. La fonction g est définie sur $]-1;+\infty[$ de plus pour tout

$x \in]-1;+\infty[$, on a

$$\begin{aligned}
\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} &\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{1}{2}x+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{6}x^3+o\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}+\frac{\frac{3}{4}}{2}x^2-\frac{\frac{3\times 5}{2\times 2\times 2}}{6}x^3+o\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-1;+\infty[$,

$$\begin{aligned}
g(x) = \cos(x)\times\frac{1}{\sqrt{1+x}} &\underset{x\to 0}{=} \left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\right)\left(1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+o\left(x^3\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{lllll}
1 & -\frac{x}{2} & +\frac{3}{8}x^2 & -\frac{5}{16}x^3 & +o\left(x^3\right)\\
 & & -\frac{x^2}{2} & +\frac{x^3}{4} & -\frac{x^2}{2}\left(\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+o\left(x^3\right)\right)\\
 & & & & +o\left(x^3\right)\left(1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+o\left(x^3\right)\right)
\end{array}\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Remarque 28 : Lorsque l'on cherche un développement limité d'ordre n d'un produit fg, il n'est pas toujours utile de calculer un développement limité d'ordre n de f et de g (cela peut être long). Il faut connaître le degré du premier terme non nul de la partie régulière de f et de g par exemple p et q, et factoriser par le terme prépondérant :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x^p \underbrace{(1+\dots)}_{=u(x)} \qquad \text{et} \qquad g(x) \underset{x\to 0}{=} x^q \underbrace{(1+\dots)}_{=v(x)}$$

pour alors anticiper que pour obtenir un développement limité de $f(x)g(x) \underset{x\to 0}{=} x^{p+q}u(x)v(x)$ d'ordre n, un développement d'ordre $n-p-q$ de u et de v suffira. Autrement dit un développement limité d'ordre $n-q$ pour f et un développement d'ordre $n-p$ pour g suffiront.

Exemple 29 : Calculons un $\mathrm{DL}_6(0)$ de la fonction $f : x \mapsto \sin^2(x)\ln\left(1+x^2\right)$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ de plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin(x) = x(1+\dots)$. Nous aurons donc $\sin^2(x) = x^2(1+\dots)$. D'autre part, $\ln\left(1+x^2\right) = x^2(1+\dots)$. Par conséquent nous aurons $f(x) = x^4(1+\dots)$. On voit ainsi que pour obtenir un DL d'ordre 6 pour f, des DL d'ordre 2 seulement suffiront pour les termes notés $(1+\dots)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right) = x\left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)^2 &\underset{x\to 0}{=} x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)\left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x^2\left(\begin{array}{lll}
1 & -\frac{x^2}{6} & +o\left(x^2\right)\\
 & -\frac{x^2}{6} & -\frac{x^2}{6}\left(-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)\\
 & & +o\left(x^2\right)\left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)
\end{array}\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x^2\left(1-\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $u > -1$,

$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+o\left(u^2\right) \underset{u\to 0}{=} u\left(1-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{3}+o\left(u^2\right)\right).$$

Par conséquent, avec $u = x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ (cf la proposition ci-dessous pour la composée de développement limité) on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\ln\left(1+x^2\right) \underset{x\to 0}{=} x^2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^2\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right).$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x\to 0}{=} x^4\left(1-\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right) &\underset{x\to 0}{=} x^4\begin{pmatrix} 1 & -\frac{x^2}{2} & +o\left(x^2\right) \\ & -\frac{x^2}{3} & +o\left(x^2\right) \\ & & +o\left(x^2\right) \end{pmatrix} \\ &\underset{x\to 0}{=} x^4\left(1-\frac{5}{6}x^2+o\left(x^2\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^4-\frac{5}{6}x^6+o\left(x^6\right). \end{aligned}$$

IV.2 Composée et quotient

Proposition IV.2 (admis)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f et u deux fonctions définies au voisinage de 0. On suppose que

1. la fonction f admet un développement limité d'ordre n en 0,
2. la fonction u admet un développement limité d'ordre n en 0,
3. $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$.

Alors, en notant P la partie régulière de u et Q la partie régulière de f :

$$u(x) \underset{x\to 0}{=} P(x)+o\left(x^n\right) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x)+o\left(x^n\right),$$

on obtient que la fonction $f\circ u$ admet également un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie régulière R est obtenue en tronquant à l'ordre n le polynôme $Q\circ P$.

Exemple 30 : Calculons un $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. D'une part pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} 1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o\left(u^3\right).$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = \sin(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right).$$

On note que $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $u^3(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$ et donc $o\left(u^3(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)$ et $u^3(x) \underset{x\to 0}{=} x^3+o\left(x^3\right)$. De plus,

$$u^2(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^2+o\left(x^3\right).$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$, on a par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\sin(x)} &\underset{x\to 0}{=} 1+u(x)+\frac{u(x)^2}{2}+\frac{u(x)^3}{6}+o\left(u(x)^3\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1+x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)+\frac{x^2+o\left(x^3\right)}{2}+\frac{x^3+o\left(x^3\right)}{6}+o\left(x^3\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

Corollaire IV.3 (quotient)

Si f est la fonction définie par $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et si u est une fonction ayant un développement limité d'ordre n en 0 et vérifie $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$, alors $f\circ u$ admet un développement limité d'ordre n en 0 et

$$f\circ u(x) = \frac{1}{1-u(x)} \underset{x\to 0}{=} 1+u(x)+u^2(x)+\cdots+u^n(x)+o\left(x^n\right),$$

où en développant les puissances de u, on ne gardera que les monômes de degré inférieur ou égal à n.

Exemple 31 :

1. Donner un $DL_3(0)$ de la fonction $x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.
   On sait que $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$. On note que $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x\left(1+\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)$ donc un développement limité à l'ordre 2 de $\frac{1}{\mathrm{ch}}$ est suffisant et on a $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$. Par conséquent
   $$\frac{1}{\mathrm{ch}(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}.$$
   Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$ et on observe que $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Or $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+o(u)$ et $o(u(x)) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$. Donc
   $$\frac{1}{\mathrm{ch}(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+u(x)} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)+o\left(x^2\right).$$
   Dès lors,
   $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} &\underset{x\to 0}{=} \left(x+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x \quad -\frac{x^3}{2} \quad +o\left(x^3\right)\\ &\qquad\quad +\frac{x^3}{6} \quad +o\left(x^3\right)\\ &\qquad\qquad\qquad +o\left(x^3\right).\end{aligned}$$
   Conclusion,
   $$\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right).$$
2. Donner un $DL_4(0)$ de la fonction $\frac{1}{\cos}$.
   On sait que $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)$. Donc,
   $$\frac{1}{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)}$$
   Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)$. Alors,
   $$\frac{1}{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+u(x)}.$$
   Or on observe que $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et on sait que $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2-u^3+u^4+o\left(u^4\right)$.
   - On a $u(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
   - De plus, $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ donc par élévation à la puissance, $u(x)^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^4}{4}$ i.e.
     $$u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{4}+o\left(x^4\right).$$
   - D'autre part, $u(x)^3 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^6}{8} \underset{x\to 0}{=} o\left(x^4\right)$ et donc $u(x)^4 \underset{x\to 0}{=} o\left(x^4\right)$ et $o\left(u(x)^4\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^4\right)$.

   Ainsi,
   $$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &\underset{x\to 0}{=} 1-u(x)+u(x)^2-u(x)^3+u(x)^4+o\left(u(x)^4\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)+\frac{x^4}{4}+o\left(x^4\right)+o\left(x^4\right)+o\left(x^4\right)+o\left(x^4\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o\left(x^4\right).\end{aligned}$$

Exemple 32 : Factorisation par le terme prépondérant

1. Donner un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f : x \mapsto \frac{x^2}{1-\cos(x)}$.
   On sait que $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$. Par conséquent,
   $$f(x) = \frac{x^2}{1-\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)}.$$
   On factorise alors dans le dénominateur par le terme prépondérant qui est $\frac{x^2}{2}$ pour faire apparaitre du $\frac{1}{1+u}$ ou $\frac{1}{1-u}$:
   $$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12} + o\left(x^2\right)\right)} \underset{x\to 0}{=} 2\frac{1}{1 - \frac{x^2}{12} + o\left(x^2\right)}.$$
   On se rend compte que l'ordre initial n'est pas suffisant. Reprenons, on sait que l'on a également $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)$. Donc,
   $$1-\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12} + o\left(x^3\right)\right).$$
   D'où,
   $$f(x) \underset{x\to 0}{=} 2\frac{1}{1 - \frac{x^2}{12} + o\left(x^3\right)}.$$
   Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{12} + o\left(x^3\right)$. Dès lors, on a $f(x) \underset{x\to 0}{=} 2\frac{1}{1-u(x)}$ avec, et c'est très important,
   $$u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
   Or $\frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + u^2 + u^3 + o\left(u^3\right)$. De plus,
   - $u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{12} + o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
   - Puis,
   $$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x^2}{12} + o\left(x^3\right)\right)\left(\frac{x^2}{12} + o\left(x^3\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{x^4}{144}\right) + 2o\left(\frac{x^5}{12}\right) + o\left(x^6\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right). \end{aligned}$$
   - De même,
   $$u(x)^3 \underset{x\to 0}{=} u(x)^2 u(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)\left(\frac{x^2}{12} + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right).$$
   - Enfin, $o\left(u(x)^3\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)$.

   On obtient donc
   $$f(x) \underset{x\to 0}{=} 2\left(1 + u(x) + u(x)^2 + u(x)^3 + o\left(u(x)^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} 2\left(1 + \frac{x^2}{12} + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right)\right).$$
   Conclusion,
   $$f(x) \underset{x\to 0}{=} 2 + \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right).$$
2. Donner un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $g : x \mapsto \ln\left(1 + x + \sqrt{1+x}\right)$.
   On sait que
   $$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{(1/2)(-1/2)}{2}x^2 + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{6} + o\left(x^2\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

Donc

$$g(x)=\ln\left(1+x+\sqrt{1+x}\right)\underset{x\to 0}{=}\ln\left(1+x+1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o\left(x^3\right)\right)\underset{x\to 0}{=}\ln\left(2+\frac{3x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o\left(x^3\right)\right).$$

On factorise par le terme prépondérant qui est 2 ici :

$$g(x)\underset{x\to 0}{=}\ln\left(2\left(1+\frac{3x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}+o\left(x^3\right)\right)\right)\underset{x\to 0}{=}\ln(2)+\ln\left(1+\frac{3x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}+o\left(x^3\right)\right).$$

Posons $u(x)\underset{x\to 0}{=}\frac{3x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}+o\left(x^3\right)$. On a alors,

$$g(x)\underset{x\to 0}{=}\ln(2)+\ln\left(1+u(x)\right).$$

Or $u(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$ et $\ln(1+u)\underset{u\to 0}{=}u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+o\left(u^3\right)$. Calculons,

- $u(x)\underset{x\to 0}{=}\frac{3x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}+o\left(x^3\right)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$
- De plus,

$$\begin{aligned}
u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(\tfrac{3x}{4}-\tfrac{x^2}{16}+\tfrac{x^3}{32}+o\left(x^3\right)\right)\left(\tfrac{3x}{4}-\tfrac{x^2}{16}+\tfrac{x^3}{32}+o\left(x^3\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \tfrac{9x^2}{16} \quad -\tfrac{3x^3}{64} \quad +o\left(x^3\right)\\
&\qquad\qquad -\tfrac{3x^3}{64} \quad +o\left(x^3\right)\\
&\qquad\qquad\qquad +o\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \tfrac{9x^2}{16} \quad -\tfrac{3x^3}{32} \quad +o\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

- Puis

$$\begin{aligned}
u(x)^3 &\underset{x\to 0}{=} \left(\tfrac{3x}{4}-\tfrac{x^2}{16}+\tfrac{x^3}{32}+o\left(x^3\right)\right)\left(\tfrac{9x^2}{16}-\tfrac{3x^3}{32}+o\left(x^3\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \tfrac{27x^3}{64} \quad +o\left(x^3\right)\\
&\qquad\qquad +o\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \tfrac{27x^3}{64} \quad +o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

- Enfin, $o\left(u(x)^3\right)\underset{x\to 0}{=}+o\left(x^3\right)$.

Dès lors,

$$\begin{aligned}
g(x) &\underset{u\to 0}{=} \ln(2)+u(x)-\tfrac{u(x)^2}{2}+\tfrac{u(x)^3}{3}+o\left(u(x)^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \ln(2)\tfrac{3x}{4} \quad -\tfrac{x^2}{16} \quad +\tfrac{x^3}{32} \quad +o\left(x^3\right)\\
&\qquad\qquad -\tfrac{9x^2}{32} \quad +\tfrac{3x^3}{64} \quad +o\left(x^3\right)\\
&\qquad\qquad\qquad +\tfrac{9x^3}{64} \quad +o\left(x^3\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +o\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \ln(2)+\tfrac{3x}{4} \quad -\tfrac{11x^2}{32} \quad +\tfrac{14x^3}{64} \quad +o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$g(x)\underset{x\to 0}{=}\ln(2)+\frac{3x}{4}-\frac{11x^2}{32}+\frac{7x^3}{32}+o\left(x^3\right).$$

3. Donner un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $h: x\mapsto \mathrm{e}^{\frac{\arctan(x)}{x}}$.
   On sait que $\arctan(x)\underset{x\to 0}{=}x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^4\right)$. Donc,

$$\frac{\arctan(x)}{x}\underset{x\to 0}{=}1-\frac{x^2}{3}+o\left(x^3\right).$$

Ainsi,

$$h(x)=\mathrm{e}^{\frac{\arctan(x)}{x}}\underset{x\to 0}{=}\mathrm{e}^{1-\frac{x^2}{3}+o\left(x^3\right)}.$$

Ici on utilise la propriété $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b$ pour faire apparaitre de e^u avec $u \to 0$:

$$h(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^1 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{3}+o(x^3)}.$$

Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{3} + o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. On a $\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o\left(u^3\right)$.

- $u(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{3} + o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- De plus $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{3}$ donc $u(x)^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^4}{9} \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)$.
- Par suite, $u(x)^3 \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)$ et $o\left(u(x)^3\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)$.

D'où,

$$h(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^1 \left(1 - \frac{x^2}{3} + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{3}x^2 + o\left(x^3\right).$$

4. Donner un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $k : x \mapsto \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$.

IV.3 Primitivation des développements limités

Lemme IV.4 (admis)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un voisinage de 0. Soit f une fonction définie sur I telle que pour tout $x \in I$, $f(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^n\right)$. Si F est une primitive de f sur I, alors

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + o\left(x^{n+1}\right).$$

Théorème IV.5 (Primitivation des DL)

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un voisinage de 0, f une fonction définie sur I admettant un développement limité d'ordre n en 0 :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right).$$

Soit F une primitive de f sur I. Alors F admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0 qui est donné par

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o\left(x^{n+1}\right).$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$, I un voisinage de 0, $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$ et F une primitive de f sur I. On suppose qu'il existe $(a_k)_{k\in[\![0;n]\!]} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right).$$

Montrons que F admet un développement limité obtenu à partir de celui de f en intégrant terme à terme.
On pose pour tout $x \in I$,

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

On a alors $g(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^n\right)$. Posons également

$$\forall x \in I, \quad G(x) = F(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Alors, puisque F est une primitive, F est dérivable sur I. Il en va donc de même pour G en tant que différence de F et d'un polynôme. De plus,

$$\forall x \in I, \quad G'(x) = F'(x) - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a_k}{k+1} x^{k+1}\right)' = f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = g(x).$$

Donc G est une primitive de g et $g(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$. Ainsi par intégration du petit o, on en déduit que $\forall x \in I$, $G(x) \underset{x\to 0}{=} G(0) + o\left(x^{n+1}\right)$. Par suite, on obtient

$$F(x) = G(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \underset{x\to 0}{=} G(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o\left(x^{n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o\left(x^{n+1}\right).$$

□

Exemple 33 :

1. Retrouver le développement limité en 0 à l'ordre n de $x \mapsto \ln(1+x)$.
   On rappelle que l'on a établi dans l'exemple 12 le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ en 0. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
   $$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o\left(x^n\right).$$
   La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est continue sur $]-\infty;1[$ qui est un voisinage de 0. Donc admet des primitives sur $]-\infty;1[$. En particulier on sait que $x \mapsto -\ln(1-x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ sur $]-\infty;1[$. Donc d'après le théorème IV.5, on en déduit que
   $$\begin{aligned} -\ln(1-x) &\underset{x\to 0}{=} \underbrace{-\ln(1-0)}_{=0} + \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} + o\left(x^{n+1}\right) \\ \Leftrightarrow \quad \ln(1-x) &\underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + o\left(x^{n+1}\right) \qquad \text{par changement d'indice } \tilde{k} = k+1 \end{aligned}$$
   Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que le développement de $x \mapsto \ln(1-x)$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ est
   $$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o\left(x^n\right).$$
   Naturellement quand $x \to 0$, $-x \to 0$, donc on a également
   $$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-x)^k}{k} + o\left((-x)^n\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o\left(x^n\right).$$
2. Retrouver le développement limité en 0 à l'ordre $2n+1$ de $x \mapsto \arctan(x)$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on sait que $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^k + o\left(u^n\right)$. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = x^2$ et $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. On obtient alors,
   $$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(x^2\right)^k + o\left(\left(x^2\right)^n\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o\left(x^{2n}\right).$$
   On sait que la fonction arctan est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Donc par le théorème d'intégration des développements limités, on obtient bien
   $$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} \arctan(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

Exemple 34 :

1. Calculer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\ln(\mathrm{ch})$ puis en déduire à nouveau le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$ obtenu à l'exemple 31.
   On sait que $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$. Donc
   $$\ln\left(\mathrm{ch}(x)\right) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right).$$
   Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Or $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} o\left(u^2\right)$.

- $u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$
- Par suite,
$$u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right)\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right).$$
- Donc $o\left(u(x)^2\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^4\right)$.

Ainsi,
$$\begin{aligned}\ln\left(\mathrm{ch}(x)\right) &\underset{x\to 0}{=} u(x) - \tfrac{u(x)^2}{2} + o\left(u(x)^2\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \tfrac{x^2}{2} \quad + \tfrac{x^4}{24} \quad + o\left(x^4\right)\\ &\qquad\qquad - \tfrac{x^4}{8} \quad + o\left(x^4\right)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + o\left(x^4\right).\\ &\underset{x\to 0}{=} \tfrac{x^2}{2} \quad - \tfrac{x^4}{12} \quad + o\left(x^4\right).\end{aligned}$$

Posons $F = \ln(\mathrm{ch})$. La fonction F est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus $f = F' = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$.

- La fonction f est $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ donc admet notamment un développement limité à l'ordre 3 en 0, notons-le
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o\left(x^3\right).$$
- F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Donc par le théorème d'intégration des développements limités, F admet un développement limité à l'ordre 4 en 0 (on le savait déjà) et
$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \frac{a_3}{4}x^4 + o\left(x^4\right).$$

Or $F(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o\left(x^4\right)$. Donc par unicité du développement limité
$$\begin{cases} F(0) = \ln\left(\mathrm{ch}(0)\right) = \ln(1) = 0 = 0 \text{ OK}\\ a_0 = 0\\ \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}\\ \frac{a_2}{3} = 0\\ \frac{a_3}{4} = -\frac{1}{12}\end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = a_3 = 0\\ a_1 = 1\\ a_3 = -\frac{1}{3}\end{cases}$$

Ainsi,
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

NB : le fait que $a_0 = a_2 = 0$ s'anticipait par le fait que $f = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$ est une fonction impaire !

2. A l'aide de l'exemple 31 déterminer un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\frac{\sin}{\cos^2}$.

Par l'exemple 31, on a $\frac{1}{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o\left(x^4\right)$. Or la fonction $F = \frac{1}{\cos}$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et sa dérivée est donnée par
$$F' = f = \frac{\sin}{\cos^2}.$$
La fonction f est $\mathscr{C}^3$ sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc possède un développement limité d'ordre 3 en 0, notons-le
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o\left(x^3\right).$$
Puisque la fonction f est impaire, on en déduit que $a_0 = a_2 = 0$. Comme F est une primitive de f sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, par le théorème d'intégration des développements limités,
$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_3}{4}x^4 + o\left(x^4\right).$$
Or
$$F(x) = \frac{1}{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o\left(x^4\right).$$

Donc par unicité des développements limités, on a

$$\begin{cases} F(0) &= \frac{1}{\cos(0)} = 1 = 1 \text{ OK} \\ \frac{a_1}{2} &= \frac{1}{2} \\ \frac{a_3}{4} &= \frac{5}{24} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} F(0) &= \frac{1}{\cos(0)} = 1 = 1 \text{ OK} \\ a_1 &= 1 \\ a_3 &= \frac{5}{6} \end{cases}$$

Conclusion,

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \underset{x\to 0}{=} x + \frac{5}{6}x^3 + o\left(x^3\right).$$

IV.4 Formule de Taylor-Young

Théorème IV.6 (Taylor-Young)

Soient I un intervalle, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $x_0 \in I$. Pour tout $x \in I$ on a

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o\left((x-x_0)^n\right).$$

Remarque 35 :

- Les cas $n = 0$ et $n = 1$ correspondent à la Proposition III.6.
- La démonstration de ce théorème démontrera le point 3 de la Proposition III.6 que nous avions précédemment admis qui nous dit que toute fonction de classe $\mathscr{C}^n$ admet un DL d'ordre n.
- Par l'unicité d'un développement limité, si $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$ et si f est de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de x_0 alors nécessairement pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, on a $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Démonstration. Soit I un voisinage de x_0. Procédons par récurrence sur n et posons $\mathscr{P}(n)$ la propriété suivante :

$$\mathscr{P}(n) : \forall f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R}), \quad f(x) \underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o\left((x-x_0)^n\right).$$

Initialisation. Si $n = 0$ ou même $n = 1$, cela correspond aux points 1 et 2 de la Proposition III.6 que nous avons déjà démontrés.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$. La fonction $g = f'$ existe sur I et $g \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$. Donc par hypothèse de récurrence, on a

$$g(x) \underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} g^{(k)}(x_0) + o\left((x-x_0)^n\right).$$

Puisque la fonction f est une primitive de g sur I, on en déduit du théorème IV.6 (intégration des DL) que

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to x_0}{=} f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k!(k+1)} \underbrace{g^{(k)}(x_0)}_{=f^{(k+1)}(x_0)} + o\left((x-x_0)^{n+1}\right) \\ &\underset{x\to x_0}{=} f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0) + o\left((x-x_0)^{n+1}\right) \\ &\underset{x\to x_0}{=} f(x_0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(x-x_0)^{k}}{k!} f^{k}(x_0) + o\left((x-x_0)^{n+1}\right) \\ &\underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-x_0)^{k}}{k!} f^{k}(x_0) + o\left((x-x_0)^{n+1}\right), \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie et le théorème est démontré. □

IV.5 Applications

Exemple 36 : Rechercher un équivalent et/ou une limite.
Déterminer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x(1+\cos(x))-2\tan(x)}{x^3}$.

Exemple 37 : Etude d'une tangente.

1. Donner l'équation de la tangente au graphe de la fonction exp en 1.
2. Déterminer la position de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ par rapport à sa tangente en 0.

Exemple 38 : Etude d'une asymptote.

1. Etudier les branches infinies de la fonction f définie sur $\mathscr{D} =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.
2. Etudier les branches infinies de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

Proposition IV.7

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ un point un l'intérieur de I ($a \neq \inf(I)$ et $a \neq \sup(I)$) et f une fonction ayant un développement limité d'ordre 2 en a :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right).$$

1. *(Condition nécessaire)* Si f admet un extremum en a, alors $a_1 = 0$.
2. *(Condition suffisante)*
   - Si $a_1 = 0$ et $a_2 > 0$, alors f admet un minimum local en a.
   - Si $a_1 = 0$ et $a_2 < 0$, alors f admet un maximum local en a.

Démonstration.

1. Si f admet un développement limité à l'ordre 2 alors par troncature, f admet un développement limité à l'ordre 1 et donc par la proposition III.6, on en déduit que f est dérivable en a et que
$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a).$$
Par unicité du développement limité, $a_1 = f'(a)$. Or par la propoition V.7 du chapitre 2, pour que a soit un extremum, il faut que a soit un point critique de f :
$$a_1 = f'(a) = 0.$$
2. Supposons que $a_1 = 0$ et que $a_2 > 0$. Alors dans ce cas (l'hypothèse $a_2 \neq 0$ est fondamentale),
$$f(x) - a_0 \underset{x\to a}{\sim} a_2(x-a)^2.$$
Or deux équivalents ont le même signe au voisinage du point considéré, donc il existe J un voisinage de a tel que
$$\forall x \in J, \qquad f(x) - a_0 \geqslant 0 \qquad \text{i.e.} \qquad f(x) \geqslant a_0.$$
Or puisque f admet un développement à l'ordre 0 en a, on a $a_0 = f(a)$ (vrai uniquement pour l'ordre 0 et 1) et donc
$$\forall x \in J, \qquad f(x) \geqslant f(a).$$
Conclusion, dans ce cas, a est bien un minimum local. On traite le cas $a_2 < 0$ de la même façon.

□

Remarque 39 : En particulier, si f est $\mathscr{C}^2$, par la formule de Taylor-Young, $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right)$. Donc pour la recherche d'extrema, on retrouve bien la démarche suivante : on commence par chercher les points critiques avec la dérivée première puis on peut chercher à savoir si c'est un extremum local ou non à l'aide du signe de la dérivée seconde en a.

V Complément sur la domination

Définition V.1

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, $a\in\overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et f et g deux éléments de $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$.

- *Fonctions :* on dit que f est **dominée par** g en a, noté $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ (f est un grand o de g en a) si et seulement si

$$\text{la fonction } \frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } a.$$

- *Suites :* on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **dominée par** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ noté $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ (u_n est un grand o de v_n) si et seulement si

$$\text{la suite } \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}$$

Proposition V.2

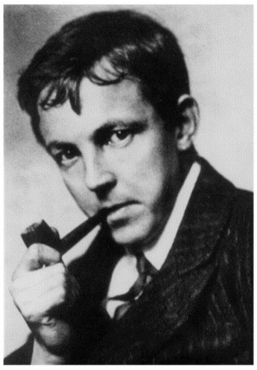
1. *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.
2. *Fonctions :* si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ alors $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$.
3. *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.
4. *Fonctions :* si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$.
5. *Suites :* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(1)$ si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
6. *Fonctions :* $f(x) \underset{x\to a}{=} O(1)$ si et seulement si la fonction f est bornée sur un voisinage de a.

Proposition V.3

1. **(Transitivité)** Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$.
2. **(Somme)** Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$ alors $u_n+v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$. Autrement dit
$$O(w_n)+O(w_n) \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n).$$
3. **(Produit)** Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(t_n)$ alors $u_nv_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_nt_n)$. Autrement dit
$$O(w_n)\,O(t_n) \underset{n\to+\infty}{=} O(w_nt_n).$$
4. **(Absorption)** Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ alors pour tout $\lambda\neq 0$, $\lambda\,u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\lambda\,v_n)$. Autrement dit
$$\lambda\,O(v_n) \underset{n\to+\infty}{=} O(\lambda\,v_n) \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n).$$

Exemple 40 :

- $\sin(n)n^2 \underset{n\to+\infty}{=} O\left(n^2\right)$.
- $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+O\left(x^4\right)$.



HARDY Godfrey *(Cranleigh (Angleterre) 1877 - Cambridge 1947) entra au Trinity College de Cambridge en 1896 où il se tourna vers les mathématiques en découvrant le « Cours d'analyse » de Jordan. Il y enseigna à partir de 1906 avant d'obtenir un poste à Oxford en 1919. Après un court séjour à Princeton, il revint à Cambridge et y demeurera jusqu'à sa retraite en 1942. Les mathématiques de Hardy étaient toujours orientées vers la théorie des nombres mais pour parvenir à ses fins, il établit d'importants résultats en analyse. Il découvrit, indépendamment du physicien Weinberg, la loi portant leurs deux noms décrivant l'équilibre génétique au sein d'une population. Son résultat le plus célèbre fut de démontrer que la fonction* ζ *de Riemann admet une infinité de zéros de partie réelle* $1/2$. *Il travailla avec Littlewood avec qui il établit une méthode pour décrire le comportement asymptotique d'une suite particulière d'entiers. Il échangea avec le mathématicien Ramanujan, grand prodige autodidacte indien qu'Hardy fit venir en Angleterre.*

Hardy contribua à rendre les mathématiques britanniques plus rigoureuses et grâce à son rayonnement unique fut l'un des représentants majeurs des mathématiques anglaises du XXième siècle.

Hardy introduit la notation $\preccurlyeq$ *pour signifier la négligeabilité. Notation qu'il abandonnera rapidement pour la notation de Landau* o. *La notation* $\ll$ *est due à Vinogadrov en 1930.*

Lors d'un cours au Trinity Collège, Hardy énonce un résultat et affirme : « La démonstration est évidente ! » Mais son assurance se transforme en doute, il se gratte la tête et dit : « Au fait, est-ce évident ? ». Il se met à tourner en répétant « Est-ce évident ? » Il sort alors de la salle et revient quelques minutes plus tard en affirmant « Oui, c'était évident ! ».

Profondément athée, Hardy était férocement opposé à la religion et à l'idée de Dieu. Paradoxalement, cette posture l'a poussé à donner corps au personnage dont il voulait nier l'existence. Il s'amusait donc à venir au match de cricket avec un parapluie et une liasse de papiers pour faire croire à Dieu qu'il souhaitait l'annulation du match pour travailler ses mathématiques. En tant que pire ennemi de Hardy, Dieu lui refuserait cette joie et lui enverrait donc du soleil...

Dans ce même esprit, une anecdote désormais célèbre, raconte qu'avant d'effectuer une traversée par gros temps du Danemark à l'Angleterre, Hardy envoya une carte postale à Bohr en lui écrivant : « Ai preuve de l'hypothèse de Riemann. Carte trop petite pour démonstration. » Hardy savait ainsi que Dieu épargnerait son navire afin de ne pas lui donner l'immense gloire de faire croire à la communauté mathématique qu'il avait démontré l'hypothèse de Riemann.

Comme à son habitude, le professeur a donné un très (trop ?) long devoir maison à faire : une montagne de développements limités à faire. Manque de chance, cela tombe pendant les vacances : Noël, le nouvel an, le ski, la conjecture actuelle, tout ça... Bref l'étudiant se retrouve en peine de finir tous les calculs la veille (naturellement...) de la date limite. Il introduit donc proprement les notations, donne les développements limités usuels qui permettent de démarrer, précise à l'aide de la factorisation à quel ordre il faut pousser le calcul, rédige les cinq premières lignes et anticipe la suite du calcul en ne justifiant que les points essentiels et difficiles que devront présenter la démonstration. Il laisse malheureusement sa démonstration inachevée mais écrit sur sa copie « La preuve est laissée en exercice. Le correcteur vérifiera aisément par le calcul que le reste du raisonnement est trivial. » La semaine suivante (ou trois semaines plus tard...) il reçoit son devoir corrigé. Il remarque alors que six pages annexes ont été agrafées à l'arrière de sa copie. Il examine ces pages et découvre alors avec surprise la preuve complète décrite étape par étape. Tout à la fin, le correcteur a écrit au rouge : « J'ai fait une petite erreur sans importance. Moins 5. »