Chapitre XXIII : Probabilités et Variables aléatoires

I Définition des probabilités

I.1 Espace probabilisé

Définition I.1

On appelle
- **univers** tout ensemble non vide, souvent noté Ω,
- **évènement** tout sous-ensemble A de l'univers Ω, si $A \subseteq \Omega$, A est un évènement de Ω.
- **évènement élémentaire** tout singleton de l'univers Ω, i.e. tout sous-ensemble de Ω contenant un seul élément de Ω : pour tout $a \in \Omega$, $\{a\}$ est un évènement élémentaire,
- **issue** ou **réalisation** tout élément de Ω, si $\omega \in \Omega$, ω est une issue de Ω.

Exemple 1 : Si l'univers est $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $A = \{a, c, d\}$ est un évènement de Ω, $\{c\}$ est un évènement élémentaire de Ω et b ou d sont des issues de Ω.

Remarque 2 : Les chapitres sur les probabilités sont (avec le dénombrement) pratiquement les seuls chapitres en prépa dans lesquels les exercices sont contextualisés (je pencherais pour une explication historique, les probabilités sont récentes dans l'enseignement). De ce fait, il sera attendu que vous soyez capable de formaliser l'énoncer, de déterminer l'univers, de noter les évènements en questions puis de calculer leurs probabilités.

Exemple 3 :
1. On lance un dé à six faces. Quel est l'univers ? Quel est son cardinal ?
2. On lance deux dés l'un rouge et l'autre vert. Quel est l'univers ? Quel est son cardinal ? Quel est l'évènement réalisant un double 5 ? Quel est l'évènement réalisant le fait que la somme des deux dés vaut 8 ?
3. On lance deux dés indiscernables. Quel est l'univers ? Quel est son cardinal ? Quel est l'évènement A réalisant le fait que la somme des deux dés vaut 4 ?
4. Dans un jeu de 32 on tire 8 cartes pour faire une main. Quel est l'univers ? Quel est son cardinal ?
5. Dans une urne comprenant 5 boules numérotées de 1 à 5, on tire successivement et sans remise trois boules. Quel est l'univers ? Quel est son cardinal ?
6. On lance une pièce jusqu'à obtenir pile. On note alors le nombre de lancés effectués. Quel est l'univers ? Quel est son cardinal ?
7. On lance une flèche dans une cible de rayon 1. On note alors les coordonnées de la flèche. Quel est l'univers ? Quel est son cardinal ?

Remarque 4 : On dit qu'un évènement A est réalisé si lors de l'expérience aléatoire, le résultat obtenu est une issue de l'évènement A. Exemple : on lance deux dés indiscernables et on note A l'évènement « la somme des dés vaut 4 ». Lors d'un lancé, on obtient 1 et 3. L'évènement A est réalisé lors de ce lancé.

Exemple 5 :
1. On lance un dé rouge et un dé vert. Obtenir un trois rouge et un six vert est un évènement élémentaire.
2. On effectue un tirage simultané de quatre cartes dans un jeu de 32 cartes. Obtenir un carré de rois est un évènement élémentaire.

Remarque 6 : Tout évènement est une union (finie si l'évènement est fini et infini sinon) d'évènements élémentaires.

Définition I.2

Soit Ω un univers. Soient $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)$ deux évènements.

- On dit que $C_\Omega(A) = \overline{A}$, le complémentaire de A dans Ω, est l'évènement **contraire** de A.
- On dit que l'évènement A **implique** l'évènement B si et seulement si $A \subseteq B$.
- L'évènement « A et B » désigne l'évènement $A \cap B$.
- L'évènement « A ou B » désigne l'évènement $A \cup B$.

Définition I.3

Soit Ω un univers **fini**. On appelle **probabilité** toute application $\mathbb{P}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0; 1]$ telle que

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
2. pour tout couple d'évènements disjoints, $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$, $A \cap B = \emptyset$, on a $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Définition I.4

On appelle **ensemble** ou **espace probabilisé** tout couple $(\Omega, \mathbb{P})$ où Ω est un univers fini et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω.

Remarque 7 :

- Une probabilité est parfois notée juste P.
- Notez que par définition, pour tout évènement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$.

Exemple 8 : On pose $\Omega = \{1, 2, 3\}$ et $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0; 1]$ définie en extension par :

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \qquad \mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}(\{1,2\}) = \mathbb{P}(\{1,3\}) = \mathbb{P}(\{2,3\}) = \frac{2}{3}, \qquad \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

On peut alors vérifier que $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé. Par exemple

$$\mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \mathbb{P}(\{1,2\})$$

ou encore

$$\mathbb{P}(\{2,3\}) + \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 = \mathbb{P}(\{1,2,3\}) = \mathbb{P}(\Omega).$$

Cette probabilité correspond à un tirage aléatoire équiprobable (avec même probabilité pour toutes les issues) dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Exemple 9 : Dans une urne, on dispose de 3 boules noires et de 2 boules blanches. On tire au hasard une boule. Déterminer Ω l'univers et $\mathbb{P}$ la probabilité associée.

Définition I.5

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)$ deux évènements.

- On dit que A est un évènement **certain** si et seulement si $\mathbb{P}(A) = 1$.
- On dit que A est un évènement **impossible** ou **négligeable** si et seulement si $\mathbb{P}(A) = 0$.
- On dit que A et B sont **incompatibles** si et seulement si $A \cap B$ est impossible. Autrement dit si et seulement si
$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.$$

Remarque 10 : L'évènement Ω est toujours certain (par définition d'une probabilité) et l'évènement $\emptyset$ est toujours impossible en effet puisque $\Omega = \Omega \sqcup \emptyset$, on a

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \sqcup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset) = 1 + \mathbb{P}(\emptyset).$$

On en déduit donc bien que $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Remarque 11 : Vous verrez dans certains manuels de façon implicite que Ω est le seul évènement certain, que $\emptyset$ est le seul évènement impossible que deux évènements sont incompatibles si et seulement si leur intersection est vide et donc si et seulement s'ils sont disjoints. Formellement ce n'est pas tout à fait exact car l'on peut toujours augmenter son univers d'évènements impossibles sans pour autant « changer fondamentalement » la probabilité associée. Exemple : on modélise le lancer d'un dé équilibré à six faces par l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et on pose $\mathbb{P}$ la probabilité définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } \omega \neq 7 \\ 0 & \text{si } \omega = 7. \end{cases}$$

Nous verrons plus loin que ces valeurs de $\mathbb{P}$ permettent de définir entièrement $\mathbb{P}$ comme une probabilité. Notez que dans cette définition, l'évènement A « obtenir 7 » i.e. $A = \{7\}$ est un évènement impossible. De même les évènements $B = \{3, 7\}$ et $C = \{4, 5, 6, 7\}$ sont incompatibles mais non disjoints car $B \cap C = A \neq \emptyset$ mais $\mathbb{P}(A) = 0$. Vous n'avez pas compris ? Ce n'est pas très important car dans le cas des ensembles finis (programme de PTSI) pour un problème bien posé, on adopte toujours un univers optimal i.e. sans issue impossible. A moins d'être tordu, on définira pour le lancé d'un dé à six faces l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Mais dans un cadre plus vaste (hors programme) notamment lorsque Ω est un sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$, les négligeables ont une importance non négligeable... Notez enfin que les définitions ci-dessus dépendent de la probabilité choisie.

Remarque 12 : Si deux ensembles sont disjoints, alors il sont incompatibles. En particulier A et $\overline{A}$ sont toujours incompatibles.

Démonstration. Soient A et B deux ensembles disjoints. Alors $A \cap B = \emptyset$. Or nous avons vu dans la remarque 10 que $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et donc A et B sont incompatibles. □

Exemple 13 : On lance deux pièces distinctes ayant chacune un côté pile P et un côté face F. L'univers associé à l'expérience est alors $\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$ où par exemple (P, F) désigne le fait d'avoir obtenu pile avec la pièce 1 et face avec la pièce 2. On considère les évènements suivants :

- A : « on obtient face avec la première pièce ».
- B : « on obtient pile avec les deux pièces ».
- C : « le résultat des deux pièces est identiques ».

Déterminer A, B et C puis vérifier

1. que B est un évènement élémentaire,
2. que B implique C,
3. que A et B sont incompatibles.
4. Déterminer $\overline{A}$ et l'énoncer en français.

I.2 Variables aléatoires

Définition I.6

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. On appelle **variable aléatoire réelle** toute fonction X définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$X \quad : \quad \begin{aligned} \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega). \end{aligned}$$

Remarque 14 :

- L'ensemble $X(\Omega)$ est appelé **l'univers image** de X.
- On peut aussi définir des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble plus abstrait E. Toutes les propositions de ce cours seront énoncés pour plus de simplicité dans le cas réel mais peuvent bien souvent être adaptées à un cadre plus général.

Exemple 15 :

1. On lance deux dés distincts et on note X la somme des deux dés. Quelle est l'univers image ?
2. On tire avec remise trois cartes d'un jeu de 52 cartes. On note X le nombre de cartes de coeur obtenues. Quelle est l'univers image ? Même question si le tirage est sans remise.

Notation. Soit $B \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ une partie de $\mathbb{R}$ alors l'ensemble $X^{-1}(B)$ qui est l'image réciproque de B par la fonction X est noté

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} = \{X \in B\} = (X \in B).$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- $(X = x) = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$.
- $(X \leqslant x) = X^{-1}(]-\infty; x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\}$.
- $(X \geqslant x) = X^{-1}([x; +\infty[) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant x\}$.
- $(X < x) = X^{-1}(]-\infty; x[) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}$.
- $(X > x) = X^{-1}(]x; +\infty[) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}$.

Exemple 16 : Soit X le somme de deux dés à six faces. Déterminer $(X = 6)$ puis $(X \geqslant 10)$ et $(X \leqslant 1)$.

II Système complet d'évènements et distribution de probabilités

Proposition II.1

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$ deux évènements de Ω. On a

1. L'évènement $\emptyset$ est impossible $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
3. $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
4. Si A implique B, i.e. $A \subseteq B$ alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.
5. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
6. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_p$ une famille d'évènements disjoints deux à deux i.e. pour tout $(i, j) \in [\![1; p]\!]^2$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ alors
$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i \in [\![1;p]\!]} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i).$$

Remarque 17 :

- Si deux évènements A et B sont incompatibles alors d'après le point 5, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- On peut remplacer le dernier point par un résultat plus général : soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_p$ une famille d'évènements **incompatibles** deux à deux i.e. pour tout $(i, j) \in [\![1; p]\!]^2$, $i \neq j$, $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0$ alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in [\![1;p]\!]} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i).$$

Démonstration.

1. Déjà vu cf remarque 10.
2. On a $\Omega = A \sqcup \overline{A}$. Donc par définition d'une probabilité et puisque A et $\overline{A}$ sont disjoints, on a
$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(A \sqcup \overline{A}\right) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right).$$
Par conséquent,
$$\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A).$$
3. On a $A = \left(A \cap \overline{B}\right) \sqcup (A \cap B) = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$. Donc puisque $A \setminus B$ et $A \cap B$ sont disjoints, par définition de la probabilité,
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((A \setminus B) \sqcup (A \cap B)) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B).$$
On en déduit que
$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

4. Si $A \subseteq B$ alors $B = (B \setminus A) \sqcup A$. Les évènements $B \setminus A$ et A étant disjoints, par définition de $\mathbb{P}$, on a
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A).$$
Donc
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \setminus A).$$
Or $\mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant 0$. D'où
$$\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B).$$
5. On a $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup B$, donc
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B).$$
Donc par le point 3,
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$
6. On effectue une récurrence immédiate sur p.

□

Proposition II.2

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ un évènement de Ω. Notons $p = \operatorname{Card}(A)$ et $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$ les éléments/issues de A. Alors
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(\{a_i\}).$$

Démonstration. On pose pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $A_i = \{a_i\}$. Les évènements $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ étant disjoints deux à deux, on déduit du point 6 de la proposition précédente que
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i\in[\![1;p]\!]} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{a_i\}).$$

□

Définition II.3

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, \ldots, A_p) \in \mathscr{P}(\Omega)^p$ une famille d'évènements de Ω. On dit que $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ forme un **système complet d'évènements (incompatibles)** si et seulement si

1. les évènements $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ sont deux à deux incompatibles : pour tout $(i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, $i \neq j$, $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0$,
2. leur union vaut Ω : $\bigcup_{i\in[\![1;p]\!]} A_i = \Omega$.

Remarque 18 :

- En particulier, toute partition de Ω, i.e. toute famille $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ d'évènements deux à deux disjoints dont l'union vaut Ω forme un système complet d'évènements (incompatibles).
- Si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ alors $(\{\omega_i\})_{i\in[\![1;n]\!]}$ forme un système complet d'évènements (incompatibles).
- Si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ est un évènement de Ω, alors $\left(A, \overline{A}\right)$ forme un système complet d'évènements (incompatibles).

Remarque 19 : Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$ un système complet d'évènements (incompatibles). On a
$$\sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i) = 1.$$

Démonstration. Par la remarque 17, on a
$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in[\![1;p]\!]} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i).$$

□

Définition II.4

On appelle **distribution de probabilités** toute famille de réels positifs $(p_i)_{i\in[\![1;n]\!]} \in (\mathbb{R}_+)^n$ vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Proposition II.5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un univers fini de cardinal n.

1. Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω, alors la famille $(\mathbb{P}(\{\omega_i\}))_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une distribution de probabilités.
2. Réciproquement, si $(p_i)_{i\in[\![1;n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ est une distribution de probabilités, alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$.

Démonstration.

1. Découle directement que toute probabilité d'un évènement est positive et du fait que $(\{\omega_i\})_{i\in[\![1;n]\!]}$ forme un système complet d'évènements incompatibles (cf remarque précédente).
2. *Unicité.* Soient $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ deux probabilités sur Ω telles que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$,
$$\mathbb{P}_1(\omega_i) = \mathbb{P}_2(\omega_i) = p_i.$$
Montrons alors que $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ i.e. que pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$. Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ i.e. $A \subseteq \Omega$. Il existe $J \subseteq [\![1;n]\!]$ tel que $A = \{\omega_j \mid j \in J\}$. D'après la proposition II.2, on a alors
$$\mathbb{P}_1(A) = \sum_{j\in J} \mathbb{P}_1(\{\omega_j\}) = \sum_{j\in J} p_j = \sum_{j\in J} \mathbb{P}_2(\{\omega_j\}) = \mathbb{P}_2(A).$$
Existence. Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, il existe $J \subseteq [\![1;n]\!]$ tel que $A = \{\omega_j \mid j \in J\}$. On pose alors par définition
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j\in J} p_j.$$
L'application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ est alors bien définie (l'écriture des éléments de A étant unique, il n'y a pas d'ambiguïté sur l'image de A par $\mathbb{P}$). Montrons que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω.
   - Soit $A = \{\omega_j \mid j \in J\} \in \mathscr{P}(\Omega)$. Par hypothèse, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on a $p_i \geqslant 0$. Donc pour tout , on a
   $$\mathbb{P}(A) = \sum_{j\in J} \underbrace{p_j}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$
   De plus, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ donc
   $$1 = \sum_{j\in J} p_j + \underbrace{\sum_{i\in[\![1;n]\!]\setminus J} p_i}_{\geqslant 0} \geqslant \sum_{j\in J} p_j = \mathbb{P}(A).$$
   Donc on a montré que pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) \in [0;1]$, donc $\mathbb{P}$ est bien à valeurs dans $[0;1]$.
   - Par définition de $\mathbb{P}$ et par hypothèse sur la famille $(p_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$,
   $$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$
   - Soient $A = \{\omega_j \mid j \in J\} \in \mathscr{P}(\Omega)$ et $B = \{\omega_k \mid k \in K\} \in \mathscr{P}(\Omega)$. On suppose que $A \cap B = \emptyset$ alors $J \cap K = \emptyset$ (vérification laissée au lecteur/lectrice) et donc $A \sqcup B = \{\omega_l \mid l \in J \sqcup K\}$. Donc par définition de $\mathbb{P}$, on en déduit que
   $$\mathbb{P}(A \sqcup B) = \sum_{l\in J\sqcup K} p_l = \sum_{j\in J} p_j + \sum_{k\in K} p_k = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

□

Remarque 20 : Ce résultat très important vous dit que pour connaitre ou définir une probabilité, il suffit de connaitre les probabilités des issues de l'univers puis d'appliquer la proposition II.2 pour en déduire la probabilité d'un évènement quelconque.

Exemple 21 : On tire une boule dans une urnes en contenant 3, numérotées de 1 à 3. On suppose que chaque boule à autant de chance d'être tirée. Quel est l'univers ? Quelle est la probabilité d'une issue ? Quelle est la probabilité de l'évènement A « tirer la boule 1 ou la boule 2 » ?

Proposition II.6

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Alors la famille d'évènements $(X = x_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ forme un système complet d'évènements (incompatibles).

Démonstration. Posons pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $A_i = (X = x_i)$. Pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $i \neq j$, on a

$$A_i \cap A_j = (X = x_i) \cap (X = x_j) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i = x_j\} = \emptyset \qquad \text{car } x_i \neq x_j.$$

Donc les évènements A_i et A_j sont disjoints et donc notamment incompatibles : $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
Soit $\omega \in \Omega$. Alors $X(\omega) \in X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Donc il existe $i \in [\![1;n]\!]$ tel que $X(\omega) = x_i$. Autrement dit, $\omega \in X^{-1}(\{x_i\}) = (X = x_i) = A_i$. D'où $\Omega \subseteq \bigsqcup_{i \in [\![1;n]\!]} A_i$. La réciproque étant assurée par la définition des A_i, on en déduit que

$$\Omega = \bigsqcup_{i \in [\![1;n]\!]} A_i = \bigsqcup_{i \in [\![1;n]\!]} (X = x_i)$$

Ce qui achève de démontrer la proposition. □

Exemple 22 : On note X la somme de deux dés à 4 faces. Déterminer un système complet d'évènements incompatibles.

Corollaire II.7

Pour tout $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$, on a

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbb{P}(X = a).$$

Démonstration. Si $A \subseteq X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, il existe $I \subseteq [\![1;n]\!]$ tel que $A = \{x_i \mid i \in I\} = \bigsqcup_{i \in I} \{x_i\}$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right) &= \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\bigsqcup_{i \in I} \{x_i\}\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i \in I} \left(X^{-1}(x_i)\right)\right) && \textit{propriété sur l'image réciproque d'une union} \\
&= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i \in I} (X = x_i)\right) \\
&= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) && \textit{par propriété d'une probabilité} \\
&= \sum_{a \in A} \mathbb{P}(X = a).
\end{aligned}$$

□

III Loi d'une variable aléatoire

Définition III.1

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On appelle **loi de probabilité** de X l'application

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_X \quad : \quad \mathscr{P}(X(\Omega)) &\to [0;1] \\
A &\mapsto \mathbb{P}(X \in A).
\end{aligned}$$

Remarque 23 :

- L'application $\mathbb{P}_X$ ne dépend pas directement de Ω mais seulement de l'univers **image** $X(\Omega)$.
- Deux variables aléatoires différentes peuvent avoir la même loi : on lance deux dés équilibrés, l'un rouge et l'autre vert. On note X le résultat du dé rouge et Y celui du dé vert. Les variables aléatoires X et Y ont la même loi $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ cependant, les variables aléatoires X et Y ne sont pas égales (car à ω fixé, les résultats des dés peuvent être distincts).
- On note $X \sim Y$ le fait que les variables aléatoires X et Y suivent la même loi.

Proposition III.2

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$. Sa loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $X(\Omega)$.

Démonstration. *Définition.* Soit $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$. Posons $B = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$. L'ensemble B est bien une partie de Ω. Donc $\mathbb{P}(B)$ est bien défini et à valeur dans $[0;1]$. Il en va donc de même pour $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(B)$.
Normalisation. Si $A = X(\Omega)$ alors posons $B = X^{-1}(A)$. Par définition, on a $B = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in X(\Omega)\} = \Omega$. Par conséquent,

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\Omega) = 1 \qquad \textit{car } \mathbb{P} \textit{ est une probabilité sur } \Omega.$$

Additivité. Soit $(A_1, A_2) \in \mathscr{P}(X(\Omega))^2$ tel que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. On pose $B_1 = X^{-1}(A_1)$ et $B_2 = X^{-1}(A_2)$. Montrons que B_1 et B_2 sont disjoints. Soit $\omega \in B_1 \cap B_2$. Alors $\omega \in B_1$ et $\omega \in B_2$. Donc $X(\omega) \in A_1$ et $X(\omega) \in A_2$ donc $X(\omega) \in A_1 \cap A_2 = \emptyset$, ce qui est absurde. Donc $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Or $\mathbb{P}$ est une probabilité, donc

$$\mathbb{P}(B_1 \sqcup B_2) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A_1)\right) + \mathbb{P}\left(X^{-1}(A_2)\right) = \mathbb{P}_X(A_1) + \mathbb{P}_X(A_2).$$

D'autre part, l'image réciproque d'une union est l'union des images réciproques. Donc

$$B_1 \sqcup B_1 = X^{-1}(A_1) \sqcup X^{-1}(A_1) = X^{-1}(A_1 \sqcup A_2).$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}_X(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A_1 \sqcup A_2)\right) = \mathbb{P}(B_1 \sqcup B_2) = \mathbb{P}_X(A_1) + \mathbb{P}_X(A_2).$$

Conclusion, $\mathbb{P}_X$ est bien une probabilité sur l'univers image $X(\Omega)$. □

Corollaire III.3

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ l'univers image. Alors la famille $(\mathbb{P}(X = x_i))_{i \in [\![1;n]\!]} = (\mathbb{P}_X(\{x_i\}))_{i \in [\![1;n]\!]}$ est une distribution de probabilités. De plus, cette famille détermine entièrement la probabilité $\mathbb{P}_X$, i.e. la loi de X.

Remarque 24 : Pour déterminer $\mathbb{P}_X$ il suffit donc de connaitre les valeurs de $\mathbb{P}(X = x_i)$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$. On peut donc condenser l'information d'une loi par un tableau ou un diagramme en baton retournant pour chaque abscisse x_i la valeur $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$.

Exemple 25 : Soit X la somme de deux dés équilibrés à quatre faces. Alors

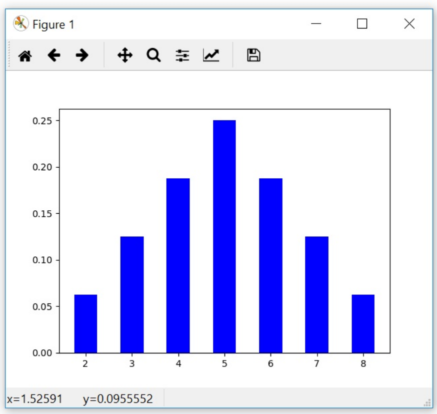
X	2	3	4	5	6	7	8
P_X	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

fig = plt.figure()

x=[2,3,4,5,6,7,8]
y=[1/16,2/16,3/16,4/16,3/16,2/16,1/16]
width=0.5

plt.bar(x, y, width, color='b' )
plt.show()
```



Définition III.4

Soient X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et $\varphi \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction réelle. On note alors $\varphi(X)$ la variable aléatoire définie par

$$\varphi(X) = \varphi \circ X \quad : \quad \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto \varphi(X(\omega)) . \end{array}$$

Remarque 26 : Notamment l'univers image de $\varphi(X)$ est donné par $\varphi(X)(\Omega) = \varphi(X(\Omega))$.

Proposition III.5

Soient X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et $\varphi \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction réelle. On pose $Z = \varphi(X)$. La loi de Z est alors donnée par

$$\forall z \in Z(\Omega), \quad \mathbb{P}(Z = z) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \varphi(x) = z}} \mathbb{P}(X = x) .$$

Démonstration. Soit $z \in Z(\Omega)$. Posons

$$A = \{x \in X(\Omega) \mid \varphi(x) = z\} = \varphi^{-1}(\{z\}) \cap X(\Omega) .$$

On observe que

$$A = \bigsqcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \varphi(x) = z}} \{x\} .$$

Il est facile de vérifier que l'union est disjointe. De plus,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = z) = \mathbb{P}\left(Z^{-1}(\{z\})\right) = \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\varphi^{-1}(\{z\})\right)\right) &= \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(A \sqcup \left(\varphi^{-1}(\{z\}) \cap \overline{X(\Omega)}\right)\right)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X^{-1}(A) \sqcup X^{-1}\left(\varphi^{-1}(\{z\}) \cap \overline{X(\Omega)}\right)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X^{-1}(A) \sqcup \emptyset\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right) \\ &= \mathbb{P}(X \in A) . \end{aligned}$$

Donc par le corollaire II.7,

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \varphi(x) = z}} \mathbb{P}(X = x) .$$

□

Corollaire III.6

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction réelle.
Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.

Exemple 27 : On lance un dé rouge et un dé vert tous les deux à 4 faces et équilibrés. On note X le résultat du dé rouge moins le résultat du dé vert.

1. Déterminer l'univers image de X et sa loi de probabilité.
2. On pose $Y = |X|$. Déterminer l'univers image de Y et sa loi de probabilité.

IV Lois usuelles

IV.1 Probabilité uniforme

Définition IV.1

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. On note $n = \text{Card}(\Omega)$ et $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. On dit que l'expérience est **équiprobable** si et seulement si pour tout $i \in [\![1; n]\!]$,

$$\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}.$$

On dit alors que $\mathbb{P}$ est la **probabilité uniforme** sur Ω.

Remarque 28 : Par la proposition II.5, la probabilité uniforme existe bien et est unique.

Proposition IV.2

Soient Ω un univers fini et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω. Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ un évènement de Ω. On a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Remarque 29 : On retrouve la formule que vous devez bien connaitre : nombre de cas favorables sur le nombre de cas total.

Démonstration. Posons $n = \text{Card}(\Omega)$. Alors par définition de $\mathbb{P}$, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$. Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. Notons $p = \text{Card}(A)$ et $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$. Par la proposition II.2, on a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(\{a_i\}) = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{n} = \frac{p}{n} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

□

Exemple 30 :

1. On lance un dé à 6 faces équilibré. On note A l'évènement « le nombre est pair ». Calculer la probabilité de A.
2. On tire simultanément 8 cartes dans un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir exactement trois coeurs puis la probabilité d'obtenir au moins un valet.

IV.2 Loi déterministe

Définition IV.3

On dit qu'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathbb{P})$ suit une **loi déterministe** ou certaine s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$X(\Omega) = \{c\} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X = c) = 1.$$

IV.3 Loi uniforme

Définition IV.4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que X suit une **loi uniforme** sur $[\![1; n]\!]$ si et seulement si

$$X(\Omega) = [\![1; n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![1; n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On note alors $X \sim \mathscr{U}([\![1; n]\!])$.

Interprétation. Cela correspond au résultat d'une expérience équiprobable contenant n issues.

Exemple 31 :

1. On note X le résultat d'un dé équilibré à 6 faces. Alors $X \sim \mathscr{U}([\![1; 6]\!])$.

2. On note X le résultat d'un tirage d'une boule dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. Alors $X \sim \mathscr{U}\left(\llbracket 1;n \rrbracket\right)$.

Remarque 32 : Si $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ sont deux entiers $a \leqslant b$ avec a éventuellement nul, alors on dit que X est une variable aléatoire uniforme sur $\llbracket a;b \rrbracket$, noté $X \sim \mathscr{U}\left(\llbracket a;b \rrbracket\right)$ si

$$X(\Omega) = \llbracket a;b \rrbracket \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \llbracket a;b \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{b-a+1}.$$

IV.4 Loi de Bernoulli

Définition IV.5

Soient $p \in [0;1]$ et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p si et seulement si

$$X(\Omega) = \{0;1\} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X=0) = 1-p, \qquad \mathbb{P}(X=1) = p.$$

On note alors $X \sim \mathscr{B}(p)$ ou parfois $X \sim b(p)$.

Interprétation. Cela correspond au résultat d'une expérience à deux issues, dont la probabilité du succès est donnée par p et la probabilité de l'échec par $1-p$.

Exemple 33 :

1. On lance une pièce équilibré et soit X la variable valant 1 si l'on a obtenu face et 0 si l'on a obtenu pile. Alors $X \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. On possède une urne avec a boules rouges et b boules vertes. On tire une boule. Soit X la variable aléatoire valant 0 si l'on a obtenu une boule rouge et 1 sinon. Alors $X \sim \mathscr{B}\left(\frac{b}{a+b}\right)$.

IV.5 Loi binomiale

Définition IV.6

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0;1]$ et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que X suit une **loi binomiale** de paramètre n et p si et seulement si

$$X(\Omega) = \llbracket 0;n \rrbracket \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \llbracket 0;n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On note alors $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

Interprétation. Cela correspond au nombre de succès obtenus après n réalisations indépendantes d'une même expérience de Bernoulli de paramètre p.
Par exemple on lance n fois une pièce donnant pile, que l'on dira être un succès, avec probabilité p. On suppose les lancers successifs et indépendants. Pour obtenir k succès exactement, on choisit k lancers parmi les n effectués, les $n-k$ autres lancers seront alors des échecs. On a donc $\binom{n}{k}$ façons de choisir la position des succès et des échecs. La probabilité d'obtenir un succès est de p et un échec de $1-p$. Les lancers étant indépendant, la probabilité d'obtenir lorsque les « positions » sont choisies k succès et $n-k$ échecs est alors de $p^k(1-p)^{n-k}$. Donc au total, on a bien

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Remarque 34 :

- On obtient bien une loi de probabilité car, par la formule du binôme de Newton,

$$\mathbb{P}(X \in \llbracket 0;n \rrbracket) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1.$$

- Une loi de Bernoulli est une loi binomiale de paramètre 1, si $X \sim \mathscr{B}(1,p)$ alors $X \sim \mathscr{B}(p)$.

On élude pour le moment la définition mathématique de l'indépendance de variables aléatoires. On se contentera de « ce sont deux variables aléatoires dont le résultat de l'une n'a pas d'incidence sur les probabilités de l'autre ».

Proposition IV.7 (admise)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0;1]$ et $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires **indépendantes** et de même loi, la loi de Bernoulli de paramètre p :

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \qquad X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p).$$

Alors

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p).$$

Exemple 35 :

1. On lance simultanément cinq pièces équilibrés. Soit X la variable aléatoire retournant le nombre de pièces ayant donné pile. Alors $X \sim \mathscr{B}\left(5, \frac{1}{2}\right)$.
2. On possède une urne avec a boules rouges et b boules vertes. On tire une boule à n reprises et avec remise. On suppose les tirages indépendants. Soit X la variable aléatoire retournant le nombre de boules vertes obtenues lors de ces n tirages. Alors $X \sim \mathscr{B}\left(n, \frac{b}{a+b}\right)$.

V Probabilités conditionnelles

Définition V.1

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ un évènement non négligeable de Ω, $\mathbb{P}(B) > 0$. Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. On appelle **probabilité conditionnelle de A sachant** B, notée $\mathbb{P}_B(A)$ ou encore $\mathbb{P}(A \mid B)$ le réel défini par

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Remarque 36 : Calculer une probabilité conditionnelle revient à changer d'univers. On *sait* que B est réalisé. Les issues possibles sont donc uniquement des issues de B. Donc parmi les issues de A seules les issues qui sont aussi dans B ne sont pas impossibles/négligeables. On considère donc $A \cap B$ et l'on renormalise sa probabilité en divisant par le poids total de l'univers qui est ici B pour obtenir un nombre entre 0 et 1.

Proposition V.2

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, un évènement non négligeable de Ω, $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_B : \qquad \mathscr{P}(\Omega) &\to [0;1] \\ A &\mapsto \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \end{aligned}$$

est une probabilité sur Ω.

Démonstration.

- Il est clair que $\mathbb{P}_B$ est bien définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$. De plus pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $A \cap B \subseteq B$. Donc

  $$0 \leqslant \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(B)$$

  et donc en divisant par $\mathbb{P}(B)$ qui est strictement positif, on en déduit que $\mathbb{P}_B(A) \in [0;1]$. Donc l'application $\mathbb{P}_B$ est bien à valeurs dans $[0;1]$.
- On a

  $$\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$$

- Enfin, pour tout couple $(A_1, A_2) \in \mathscr{P}(\Omega)$ d'évènements disjoints de Ω, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_B(A_1 \sqcup A_2) &= \frac{\mathbb{P}((A_1 \sqcup A_2) \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbb{P}((A_1 \cap B) \sqcup (A_2 \cap B))}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} && \text{car } \mathbb{P} \text{ est une probabilité} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \mathbb{P}_B(A_1) + \mathbb{P}_B(A_2).
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}_B$ est bien une probabilité sur Ω.

□

Remarque 37 : Puisque $\mathscr{P}(B) = \{\, A \cap B \mid A \in \mathscr{P}(\Omega) \,\}$, il est facile de vérifier que la restriction de $\mathbb{P}_B$ sur l'ensemble B :

$$P_B = \mathbb{P}_{B|_{\mathscr{P}(B)}} : \quad \begin{aligned} \mathscr{P}(B) &\to [0;1] \\ A &\mapsto \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}, \end{aligned}$$

définie une probabilité mais sur B.

Exemple 38 : On lance un dé équilibré à six faces. Calculer la probabilité d'obtenir un 6 sachant que le résultat est un nombre pair.

Proposition V.3 (Formule des probabilités composées)

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

1. Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ et tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\, A \mid B \,)\, \mathbb{P}(B).$$
2. Pour tout $p \geqslant 2$, et toute famille $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$, on a
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_p) = \mathbb{P}(\, A_p \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{p-1} \,)& \\ \times \mathbb{P}(\, A_{p-1} \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{p-2} \,) \cdots \mathbb{P}(\, A_2 \mid A_1 \,)\, \mathbb{P}(A_1)&.\end{aligned}$$

Remarque 39 : Par convention, si $\mathbb{P}(B) = 0$, alors $\mathbb{P}(\, A \mid B \,)\, \mathbb{P}(B) = 0$ et donc on ne demande pas dans ces formules de vérifier que les probabilités conditionnelles sont bien définies.

Démonstration.

1. C'est une simple conséquence de la définition $\mathbb{P}(\, A \mid B \,)$.
2. On procède par récurrence sur p. Si $p = 2$ la formule est vérifie d'après le premier point.
Soit $p \geqslant 2$. Supposons que le formule est vérifiée pour p. Montrons-là pour $p+1$. Soit $(A_i)_{i \in [\![1;p+1]\!]}$ une famille d'évènements. On pose $B = \bigcap_{i \in [\![1;p]\!]} A_i$ donc par le premier point, on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in [\![1;p+1]\!]} A_i \right) = \mathbb{P}(A_{p+1} \cap B) = \mathbb{P}(\, A_{p+1} \mid B \,)\, \mathbb{P}(B).$$
Or par hypothèse de récurrence appliquée à la famille $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$,
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(A_p \,\middle|\, \bigcap_{i \in [\![1;p-1]\!]} A_i \right) \ldots \mathbb{P}(\, A_2 \mid A_1 \,)\, \mathbb{P}(A_1).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in[\![1;p+1]\!]} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(A_{p+1} \mid B\right)\mathbb{P}\left(A_p \,\middle|\, \bigcap_{i\in[\![1;p-1]\!]} A_i\right)\dots\mathbb{P}\left(A_2 \mid A_1\right)\mathbb{P}\left(A_1\right)\\ &= \mathbb{P}\left(A_{p+1} \,\middle|\, \bigcap_{i\in[\![1;p]\!]} A_i\right)\mathbb{P}\left(A_p \,\middle|\, \bigcap_{i\in[\![1;p-1]\!]} A_i\right)\dots\mathbb{P}\left(A_2 \mid A_1\right)\mathbb{P}\left(A_1\right)\end{aligned}$$

□

Exemple 40 :

1. On tire successivement et sans remise des boules dans une urne qui en contient initialement 5 blanches et 4 rouges. Déterminer la probabilité que la première boule rouge tirée le soit au troisième tirage.
2. Doudou le hamster a quatre activités dans sa vie : il dort, il mange, il trotte dans sa roue ou... il ne fait absolument rien (immobile le regard vide). Toutes les heures, Doudou change d'activité et en choisit une autre de façon équiprobable. On suppose qu'à l'instant initial Doudou dort. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité pour que Doudou retourne pour la première fois dormir au temps $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition V.4 (Formule des probabilités totales)

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(B_k)_{k\in[\![1;p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$ un système complet d'évènements (incompatibles). On a pour tout $A \in (\Omega)$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(A \mid B_k)\mathbb{P}(B_k).$$

Démonstration. Pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, on pose $A_k = A \cap B_k$. Alors puisque les B_k sont incompatibles deux à deux, on a, pour tout $(i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, $i \neq j$,

$$0 \leqslant \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A \cap B_i \cap B_j) \leqslant \mathbb{P}(B_i \cap B_j) = 0.$$

Donc $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0$ et donc les A_k sont deux à deux incompatibles. De plus puisque $(B_k)_{k\in[\![1;p]\!]}$ forme un système complet, on a

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{k\in[\![1;p]\!]} B_k\right) = \bigcup_{k\in[\![1;p]\!]} (A \cap B_k) = \bigcup_{k\in[\![1;p]\!]} A_k.$$

Donc par la remarque 17, on a

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in[\![1;p]\!]} A_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(A \cap B_k).$$

De plus pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, $\mathbb{P}(A \cap B_k) = \mathbb{P}(A \mid B_k)\mathbb{P}(B_k)$ d'après la formule des probabilités composées ce qui implique bien que

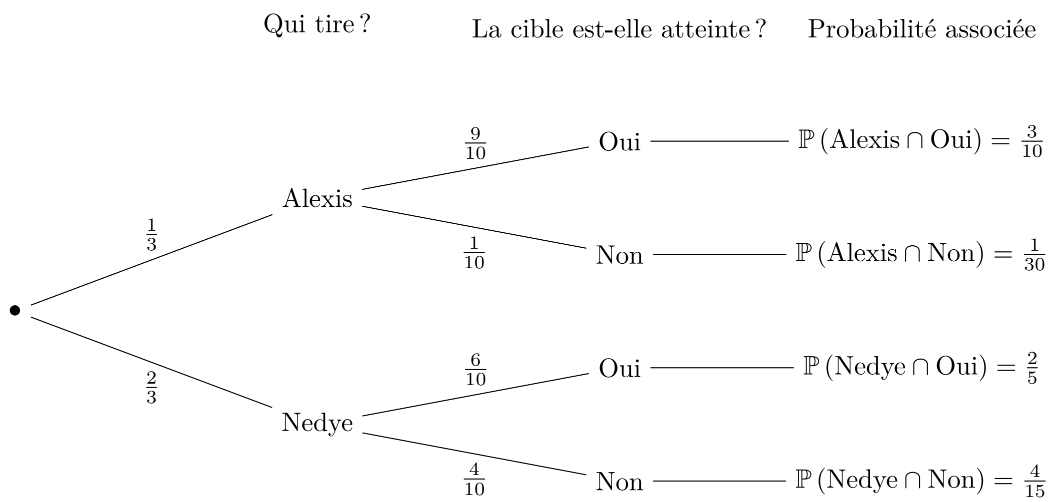
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(A \mid B_k)\mathbb{P}(B_k).$$

□

Remarque 41 : Si $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ alors, on a pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}\left(A \mid \overline{B}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right).$$

Exemple 42 : Alexis et Nedye tirent sur une cible. Alexis touche la cible 9 fois sur 10, Nedye touche la cible 6 fois sur 10. Pour chaque tire, ils choisissent au hasard qui va tirer. Sachant que Nedye a deux chances sur trois d'être le tireur, quelle est la probabilité que la cible soit atteinte ?
Il est possible de visualiser une expérience à l'aide d'un arbre mais cela ne constitue pas une justification et cela ne peut JAMAIS se substituer à un calcul rigoureux de probabilité.



Proposition V.5 (Formule de Bayes)

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ un évènement non négligeable, $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors

1. Pour $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a
$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$
2. Si $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]} \in \mathscr{P}(E)^p$ est une famille complète d'évènements (incompatibles), alors pour tout $i_0 \in [\![1;p]\!]$,
$$\mathbb{P}(A_{i_0} \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_{i_0})\,\mathbb{P}(A_{i_0})}{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(B \mid A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}$$

Exemple 43 :

1. Dans le jeu de Alexis et Nedye, on sait que la cible a été atteinte. Déterminer la probabilité pour ce soit Nedye.
2. Pour une maladie affectant une personne sur mille, on dispose d'un test de dépistage qui détecte à 99% la maladie parmi les personnes infectées mais qui retourne également un faux positif à $0,2\%$ parmi les personnes saines. Quelle est la probabilité qu'une personne dont le teste soit positif soit réellement malade ?

VI Indépendance

Définition VI.1

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$ deux évènements de Ω. On dit que A et B sont **indépendants** si et seulement si
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Remarque 44 : Un ensemble impossible est indépendant de tous les autres ensembles. En effet, si A est impossible i.e. si $\mathbb{P}(A) = 0$, alors pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, puisque $A \cap B \subseteq A$, par croissance de $\mathbb{P}$, on a $0 \leqslant \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A) = 0$ et donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

Anti-Proposition VI.2

- Deux ensembles non négligeables indépendants ne sont pas incompatibles.
- Mais ce qu'il faut surtout retenir c'est que la notion d'indépendance n'est pas équivalente à la notion d'incompatibilité. Deux ensembles compatibles peuvent être indépendants ou non.

Démonstration. Soient A et B deux évènements non négligeables indépendants alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$. Supposons A et B incompatibles alors $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ et donc $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = 0$ et donc $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(B) = 0$. Donc A ou B est négligeable ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. Donc A et B sont compatibles. $\square$

Exemple 45 : Mézian et Chadi lancent chacun leur propre dé, Lilian arbitre le jeu. On note A l'évènement « Chadi obtient un nombre pair » et B l'évènement « Mézian obtient un nombre impair » et C l'évènement « la somme des deux dés est paire ». On suppose que Lilian n'est pas très attentif (exercice pas réaliste naturellement) et que Chadi et Mézian jouent chacun avec un dé truqué qui retourne un nombre pair une fois sur trois. On suppose que les deux lancers sont indépendants.

1. Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ et justifier que A et B sont compatibles.
2. Exprimer C en fonction de A, B et leurs complémentaires.
3. Calculer $\mathbb{P}(C \cap A)$ et montrer que A et C sont compatibles.
4. Montrer que A et C sont dépendants.

Définition VI.3

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que X et Y sont **indépendantes** si

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y).$$

Proposition VI.4

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$ deux évènements. On suppose B non négligeable, $\mathbb{P}(B) \neq 0$ alors A et B sont indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A).$$

Démonstration. On a

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Donc on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \qquad \text{car } \mathbb{P}(B) \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A).
\end{aligned}$$

□

Définition VI.5

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ une famille d'évènements de Ω. On dit que les A_i sont **deux à deux indépendants** si et seulement si pour tout $(i, j) \in [\![1;p]\!]^2$, $i \neq j$, A_i est indépendant de A_j i.e.

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j).$$

Définition VI.6

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ une famille d'évènements de Ω. On dit que les A_i sont **indépendants** (ou parfois mutuellement indépendant) si et seulement si pour tout $J \subseteq [\![1;p]\!]$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

Anti-Proposition VI.7

- Des évènements indépendants sont deux à deux indépendants.
- La réciproque est FAUSSE : des évènements deux à deux indépendants ne sont pas nécessairement indépendants.

Exemple 46 : On reprend l'exemple 45 avec des dés équilibrés et on note D l'évènement « Mézian et Chadi obtiennent la même parité ». Vérifier que A, B et D sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendants.

Proposition VI.8

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ une famille d'évènements mutuellement indépendants (respectivement deux à deux indépendants). Soit $(B_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ une autre famille d'évènement de Ω telle que

$$\forall i \in [\![1;p]\!], \qquad B_i = A_i \quad \text{ou} \quad B_i = \overline{A_i}.$$

Alors $(B_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ est une famille d'évènements mutuellement indépendants (respectivement deux à deux indépendants).
En particulier pour $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$,

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{A} \text{ et } B \text{ sont indépendants} \\ &\Leftrightarrow \quad A \text{ et } \overline{B} \text{ sont indépendants} \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{A} \text{ et } \overline{B} \text{ sont indépendants.} \end{aligned}$$

Démonstration. Montrons un cas particulier. On a d'une part,

$$\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right) = \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

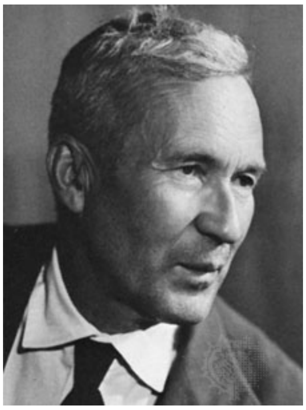
et d'autre part,

$$\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

Donc $\overline{A}$ et B sont indépendants si et seulement si

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right) = \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}(B) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \\ &\Leftrightarrow \quad A \text{ et } B \text{ sont indépendants.} \end{aligned}$$

□



Andreï KOLMOGOROV *(Tambov (à 500 km au sud de Moscou) 1903 - Moscou 1987) est un mathématicien russe durant le régime soviétique. Sa mère décède à sa naissance et Kolmogorov est élevé par sa tante dans la propriété de son grand-père avant de rejoindre Moscou. Il interrompe ses études quelques temps pour construire un chemin de fer et devenir conducteur de train. A l'âge de 17 ans il entre à l'université pour y étudier les mathématiques et la métallurgie mais se passionne dans un premier temps à l'histoire russe. Très doué pour les mathématiques il se fait cependant connaitre dès le début de ses études en construisant alors qu'il n'a que 19 ans un contre-exemple à la convergence dans les séries de Fourier qui lui vaudra une reconnaissance internationale. Après s'être intéressé à la logique, il se tourne vers les probabilités et soutient sa thèse en 1929 avant de voyager à Göttingen, Munich et Paris avec son ami mathématicien également Pavel Aleksandrov.*

Apprécié du pouvoir soviétique, il aura outre des récompenses durant toute sa carrière la tranquillité financière et politique lui permettant d'avoir accès à la littérature étrangère et en particulier de correspondre avec le mathématicien Maurice Fréchet. Egalement intéressé par la façon d'enseigner les mathématiques, de nouveaux programmes sont proposés aux écoliers soviétiques. Il décède d'un parkinson en 1987.
Les travaux de Kolmogorov touchent de nombreux domaines mais c'est sans conteste dans les probabilités que son apport est le plus considérable. Ayant étudié dans les années 1920 la théorie des ensembles et après son séjour en Allemagne et en France, il publie en 1933 « Fondement du calcul des probabilités » une axiomatisation des probabilités dans le prolongement de la théorie de la mesure et de l'intégration de Lebesgue qui permet de poser les bases de la théorie moderne des probabilités, jeune branche des mathématiques qui prendra alors tout son essor.

Un étudiant en biologie rentre chez lui après avoir eu un cours de statistique. Il raconte alors à son colocataire :
« Non, mais tu te rends compte un peu à quel point les statistiques sont importantes ?
-Pas tellement non, pourquoi ?
-On sait qu'il y a en moyenne 42 millions d'oeufs d'alligator pondus chaque année. Or les statistiques sont formelles : parmi ces oeufs seule la moitié éclot. Parmi les oeufs éclos les trois quart sont mangés par des prédateurs dans les trente-six premiers jours et enfin parmi ceux restants, seulement cinq pour-cent atteint l'âge adulte.
-Bon d'accord mais en quoi c'est si important ?
-Réfléchis, s'il n'y avait pas les statistiques, on serait bien embêté avec tous ces alligators partout ! »

Grâce aux probabilités, la génétique vient de faire un grand bond en avant : il a été démontré que si vos parents n'ont pas d'enfants alors vous avez une probabilité proche de 0 *d'avoir vous même des enfants...*