Fiche de révisions : calcul dans $\mathbb{R}$

I Le cours

1. Donner la définition d'une partie majorée, minorée, bornée.
2. Caractériser avec la valeur absolue le fait qu'une partie soit bornée.
3. Donner la définition d'un maximum, d'un minimum d'une partie.
4. Donner la définition de la borne supérieure, de la borne inférieure.
5. Donner une condition suffisante à l'existence de la borne supérieure, inférieure.
6. Donner la définition d'un intervalle.
7. Définir la partie entière.
8. Traduire le fait que $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

II Les savoir-faire

1. Savoir manipuler des inégalités (changement de sens lorsque l'on multiplie par un nombre négatif).
2. Savoir résoudre une équation/inéquation avec des valeurs absolues, en particulier par disjonction de cas.
3. Savoir résoudre une équation/inéquation avec des racines, ou par équivalents (obligatoire pour une inéquation) ou par analyse-synthèse (seulement pour une équation). Attention à bien justifier que a et b sont de même signe pour utiliser $\left(a = b \;\Leftarrow\; a^2 = b^2\right)$.
4. Savoir faire un pivot de Gauss et donner les solutions d'un système d'équations.

III Les erreurs à éviter

1. $a = b$ n'est pas équivalent à $a^2 = b^2$ si a et b ne sont pas de même signe.
2. Ne pas oublier de changer de sens une inégalité si l'on multiplie par un réel positif et/ou à vérifier le signe de ce réel.
3. La fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$, on se méfie de $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ dans le cas où x et y ne sont pas de même signe.
4. $|x| = -x$ si $x \leqslant 0$, un signe $-$ ne signifie pas être négatif ! Si $x \leqslant 0$, $-x \geqslant 0$.
5. Devant un système linéaire il est INTERDIT de faire autre chose qu'un pivot de Gauss. Notamment la substitution est interdite.
6. Il faut écrire toutes les opérations élémentaires que l'on fait et il est impossible de faire simultanément deux opérations élémentaires modifiant et faisant appel à la même ligne.

IV Les réponses du cours

1. Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On a les définitions suivantes :

$$\begin{array}{rcl} A \text{ est majorée} & \Leftrightarrow & \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A, \quad x \leqslant M \\ A \text{ est minorée} & \Leftrightarrow & \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in A, \quad m \leqslant x \\ A \text{ est bornée} & \Leftrightarrow & \exists (M, m) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in A, \quad m \leqslant x \leqslant M. \end{array}$$

2. Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On a l'équivalence suivante :

$$A \text{ est bornée} \quad \Leftrightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A, \quad |x| \leqslant M.$$

3. Soient $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ et $(m, M) \in \mathbb{R}^2$. On a les définitions suivantes :

$$\begin{array}{rcl} m = \min(A) & \Leftrightarrow & m \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, \quad m \leqslant x \\ M = \max(A) & \Leftrightarrow & M \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, \quad x \leqslant M. \end{array}$$

4. Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On a les définitions suivantes :

$$\sup(A) = \min\{M \in \mathbb{R} \mid M \text{ majore } A\}$$
$$\inf(A) = \max\{m \in \mathbb{R} \mid m \text{ minore } A\}.$$

5. Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

   Si A est non vide et minorée alors A admet une borne inférieure.
   Si A est non vide et majorée alors A admet une borne supérieure.

6. Soit $I \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall (a, b) \in I^2, \qquad [a; b] \subseteq I.$$

7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n + 1$. Cet entier n est appelé partie entière de x : $n = \lfloor x \rfloor$.
8. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y,\ \exists r \in \mathbb{Q}, \quad x < r < y.$$

   De même l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y,\ \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad x < \alpha < y.$$