Fiche de révisions : matrices

I Le cours

1. Enoncer la formule du produit matriciel.
2. Enoncer le fait que l'ensemble des matrices est non-commutatif et non-intègre.
3. Définir une matrice triangulaire.
4. Enoncer la formule de Bernoulli et du binôme de Newton pour deux matrices.
5. Donner la caractérisation de l'inversibilité.
6. Enoncer la proposition donnant l'inverse du produit.
7. Définir la transposée d'une matrice.
8. Donner la transposée d'une combinaison linéaire et la transposée d'un produit.
9. Définir une matrice symétrique, une matrice antisymétrique.
10. Définir la trace.
11. Donner la trace d'une combinaison linéaire et du produit.
12. Caractériser l'inversibilité par l'équivalence à la matrice identité.

II Les savoir-faire

1. Calculer les puissances d'une matrice.
   Méthode 1. On calcule les premiers termes, on intuite la formule, on la démontre par récurrence.
   Méthode 2. On décompose A en deux matrices $B+C$ plus simples dont on peut connaître les puissances. On applique la formule du binôme de Newton.
   Méthode 3. On obtient un polynôme annulateur de A : exemple $A^2-3A+2I_n=0_n$. On effectue la division euclidienne de X^n par $P=X^2-3X+2$ (sans chercher le quotient on détermine le reste à l'aide des racines de P). On en déduit les puissances de A.
   Méthode 4. On « diagonalise » la matrice A : à l'aide d'une matrice $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ on obtient $P^{-1}AP=D$. Connaissant les puissances de D, on obtient alors $A^n=PD^nP^{-1}$.
2. Déterminer l'inversibilité et calculer l'inverse :
   Méthode 1. Par le pivot de Gauss on montre que P est équivalente en ligne à I_n ou simplement à une matrice triangulaire sans 0 sur la diagonale. Pour le calcul de l'inverse on va jusqu'à I_n puis on applique les mêmes opérations à I_n.
   Méthode 2. On revient à la définition, on trouve un B tel que $AB=I_n$ ou $BA=I_n$. En particulier si on a un polynôme annulateur de A. Exemple si $A^2-3A+2I_n=0_n$ alors $A\frac{1}{2}(A-3I_n)=I_n$. Donc A est inversible et $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-3I_n)$.
3. Calculer une matrice produit par la formule $c_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}$.

III Les erreurs à éviter

1. Il n'est pas toujours possible de calculer un produit de matrices A et B. Pour avoir AB, il faut que le nombre de colonnes de A coïncide avec le nombre de lignes de B.
2. Les matrices ne commutent pas en général : $AB\neq BA$, les identités remarquables ne fonctionnent donc pas.
3. Bien préciser l'hypothèse de commutativité pour utiliser le binôme de Newton.
4. Ne jamais diviser par une matrice.
5. $AB=AC$ n'implique pas en général $B=C$, sauf si A est inversible.
6. A^2+A n'est pas égal à $A(A+1)$ mais à $A(A+I_n)$.

IV Les réponses du cours

1. Soient $(n, r, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant r}} \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{K})$, $B = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ et $C = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$,
$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{r} a_{i,k} b_{k,j}.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   - L'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est non-commutatif : pour $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, on a en général $AB \neq BA$.
   - L'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est non-intègre : pour $(A, B, C) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^3$, si $AB = AC$ cela n'implique pas en général que $B = C$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que M est triangulaire supérieure, $M \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]$, $i > j$, $a_{i,j} = 0$.
4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}$ et $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. On suppose que A et B commutent i.e. $AB = BA$ alors,
   - $(A+B)^m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$.
   - Si $m \neq 0$, $A^m - B^m = (A - B) \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k}$.
5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) A est inversible
   (b) $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = I_n$
   (c) $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $BA = I_n$
   De plus dans chacun des cas, $B = A^{-1}$.
6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si A et B sont inversibles alors AB est inversible et
$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$
7. Soient $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors la transposée $B = A^T = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ de A est donnée pour tout $(i,j) \in [\![1;p]\!] \times [\![1;n]\!]$ par
$$b_{i,j} = a_{j,i}.$$
8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Alors,
   - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$,
   - $(AB)^T = B^T A^T$.
9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   - La matrice M est symétrique $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $M^T = M$.
   - La matrice M est antisymétrique $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $M^T = -M$.
10. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors la trace de A est définie par
$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$
11. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Alors,
   - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mu \mathrm{Tr}(B)$,
   - $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. *Mais $Tr(AB)$ n'est pas égal en général à $Tr(A)\, Tr(B)$.*
12. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a
$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \Leftrightarrow \quad A \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_n \quad \Leftrightarrow \quad A \underset{\mathscr{C}}{\sim} I_n.$$