Fiche de révisions : analyse asymptotique

I Le cours

1. Définir la négligeabilité, l'équivalence, la domination.
2. Caractériser un $o(1)$.
3. Connaitre ses croissances comparées.
4. Que dire de deux équivalents (signe, limite) ?
5. Enoncer le théorème d'encadrement des équivalents.
6. Réciter tous ses DL usuels.
7. Enoncer l'unicité du développement limité.
8. Cas des fonctions paires/impaires.
9. Enoncer le lien entre un DL et la continuité-dérivabilité.
10. Enoncer la formule de Taylor-Young.
11. Enoncer le théorème de primitivation du développement limité.
12. Enoncer le lien entre DL et recherche d'un extremum.

II Les savoir-faire

1. Manipuler les petits o et les O (somme, produit, composée...)
2. Manipuler les équivalents (produit, quotient, élévation à la puissance, valeur absolue, changement de variable).
3. Calculer un DL en 0 (somme, produit, quotient, composée). En particulier :
   - Pour un quotient, faire apparaitre du $\frac{1}{1+u}$ en factorisant par le terme prépondérant au dénominateur.
   - Pour un logarithme, faire apparaitre du $\ln(1+u)$ en factorisant à l'intérieur par le terme prépondérant et en utilisant que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
   - Pour une exponentielle, faire apparaitre du e^u en séparant ce qui tend vers 0 de ce qui ne tend pas vers 0 et en utilisant $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b$.
   - Pour une fonction trigonométrique, faire apparaitre du $\cos(u)$ ou $\sin(u)$ ou $\tan(u)$ en développant par les formules trigonométriques.
4. Savoir faire un DL en $a \neq 0$, en posant $h = x - a$.
5. Savoir faire un DL (appelé plutôt développement asymptotique) en $+\infty$ en posant $h = \frac{1}{x}$.
6. Savoir primitiver un DL.
7. Savoir dériver un DL : on montre que f' admet un DL (notamment si f' est $\mathscr{C}^n$). On écrit son DL $f'(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$. On le primitive pour retrouver celui de $f(x)$ et on invoque l'unicité du DL pour trouver les coefficients.
8. Utiliser la formule de Taylor-Young pour invoquer l'existence du DL ou le calculer avec les derivées k-ièmes ou à l'inverse obtenir les dérivées k-ièmes par la formule de Taylor et l'unicité : $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.
9. Utiliser un petit DL pour obtenir un équivalent.
10. Utiliser un petit DL ou un équivalent pour obtenir une limite.
11. Utiliser un DL à l'ordre 1 + un terme non nul pour obtenir une tangente + la position relative.
12. Utiliser un développement asymptotique de la forme ax + b + un terme non nul pour obtenir une asymptote + la position relative.

III Les erreurs à éviter

1. NE JAMAIS ECRIRE équivalent à 0.
2. NE JAMAIS FAIRE de somme d'équivalents.
3. NE JAMAIS FAIRE de composée d'équivalents.
4. Ne pas poser un $u(x)$ qui ne tend pas vers 0 dans un changement de variable ou oublier de le préciser sur sa copie.
5. Ne pas oublier de calculer le $o\left(u(x)^n\right)$ dans un changement de variable. Bien écrire tous les petits o qui apparaissent car c'est toujours le o le plus gros qui efface tous les autres. Le petit o est toujours le plus important dans un DL.
6. Ne pas oublier la constante $f(0)$ en primitivant.
7. Il n'y a pas de réciproque à la formule de Taylor-Young à l'ordre $n \geqslant 2$. Si f admet un DL à l'ordre $n \geqslant 2$, cela ne signifie pas en général que f est $\mathscr{C}^n$.
8. Dans un DL en a, revenir et laisser la forme $f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$, ne pas développer $x-a$ ou $(x-a)^2$ par exemple.
9. Ne pas croire qu'un DL ou un équivalent puisse donner une information (position, signe) sur un ensemble plus grand qu'un voisinage. L'information est toujours localisée (au voisinage de $+\infty$ et non sur $\mathbb{R}$ tout entier par exemple).

IV Les réponses du cours

1. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et f et g deux fonctions définies sur I.
   - $f(x) \underset{x\to a}{=} o\left(g(x)\right) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
   - $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
   - $f(x) \underset{x\to a}{=} O\left(g(x)\right) \Leftrightarrow$ la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a
2. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et $f \in \mathscr{F}\left(I, \mathbb{K}\right)$. On a $f(x) \underset{x\to a}{=} o(1)$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.
3. Pour les fonctions, on a en $+\infty$, pour $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ des réels strictement positifs et $A \in \mathbb{R}$,
$$1 \underset{x\to+\infty}{\ll} \ln^{\alpha}(x) \underset{x\to+\infty}{\ll} x^{\beta} \underset{x\to+\infty}{\ll} \mathrm{e}^{\gamma x} \underset{x\to+\infty}{\ll} x^{x}.$$
   En 0,
$$0 \underset{x\to 0}{\ll} x^{\alpha} \underset{x\to 0}{\ll} 1 \underset{x\to 0}{\ll} \left|\ln(x)\right|^{\beta}.$$
   En plus pour les suites,
$$\mathrm{e}^{\alpha n} \underset{n\to+\infty}{\ll} n! \underset{n\to+\infty}{\ll} n^{n}.$$
4. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et $(f, g) \in \mathscr{F}\left(I, \mathbb{R}\right)^2$ tels que $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x)$. Alors,
   - f converge en a si et seulement si g converge en a. Dans ce cas les limites sont identiques.
   - f et g ont même signe sur un voisinage de a.
5. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et $(f, g, h) \in \mathscr{F}\left(I, \mathbb{R}\right)^3$ tels que
$$\forall x \in I, \qquad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x).$$
   Alors, par le théorème d'encadrement des équivalents,
$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x).$$
6. On a

e^{x}	$\underset{x\to 0}{=}$	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$
$\mathrm{ch}(x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$1 + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$
$\sin(x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$x - \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$
$\cos(x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$
$\arctan(x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$
$\frac{1}{1-x}$	$\underset{x\to 0}{=}$	$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right)$
$\frac{1}{1+x}$	$\underset{x\to 0}{=}$	$1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right)$
$\ln(1+x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o\left(x^n\right)$
$\ln(1-x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$-x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$
$(1+x)^{\alpha}$	$\underset{x\to 0}{=}$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right)$
$\tan(x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right)$

7. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o\left(x^n\right).$$

   Alors, pour tout $k \in [\![0\,;\, n]\!]$, $a_k = b_k$.

8. Si f est paire/impaire et admet un développement limité en 0 alors celui-ci ne possède que des puissances paires/impaires.

9. Soient I un voisinage de 0 et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$.
   (a) f est continue en 0 si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 0 en 0. Dans ce cas $f(x) \underset{x \to 0}{=} f(0) + o(1)$.
   (b) f est dérivable en 0 si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0. Dans ce case, $f(x) \underset{x \to 0}{=} f(0) + f'(0)x + o(x)$.

10. Soit $a \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$. Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ en a alors par le théorème de Taylor-Young, f admet un développement limité à l'ordre n en a donné par

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o\left((x-a)^n\right).$$

11. Soient I un voisinage de 0 et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 donné par

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right), \qquad (a_k)_{k \in [\![0\,;\, n]\!]} \in \mathbb{K}^{n+1}.$$

   Soit F une primitive de f sur I alors F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 donné par

$$F(x) \underset{x \to 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o\left(x^{n+1}\right).$$

12. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un réel à l'intérieur de I. Soit f une fonction vérifiant

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right).$$

   (a) *(Condition nécessaire)* Si f admet un extremum en a, alors $a_1 = 0$.
   (b) *(Condition suffisante)*
      - Si $a_1 = 0$ et $a_2 > 0$, alors f admet un minimum local en a.
      - Si $a_1 = 0$ et $a_2 < 0$, alors f admet un maximum local en a.