Fiche de révisions : couples de variables aléatoires

I Le cours

1. Définir la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires.
2. Définir les lois marginales d'un couple de variables aléatoires.
3. Définir une loi conditionnelle.
4. Définition de deux variables aléatoires indépendantes, de n variables aléatoires mutuellement indépendantes.
5. Enoncer le lemme de coalition.
6. Définir l'espérance.
7. Enoncer le théorème de transfert.
8. Enoncer les quatre propriétés de l'espérance.
9. Définir la variance puis la formule de Koenig-Huygens.
10. Définir la covariance et donner la formule de développement de la variance.
11. Définir la fonction génératrice.
12. Donner le lien entre la fonction génératrice, l'espérance et la variance.
13. Que dire de l'espérance, de la covariance, de la variance et de la fonction génératrice lorsque les variables sont indépendantes ?
14. Enoncer l'inégalité de Markov et celle de Bienaymé-Tchebychev.
15. Donner l'espérance, la variance et la fonction génératrice des lois usuelles.
16. Enoncer la propriété sur la somme de deux lois binomiales.

II Les savoir-faire

1. Savoir donner une loi conjointe (sans oublier de donner toujours en premier lieu l'univers image !).
2. En déduire une loi marginale ou conditionnelle.
3. Calculer une espérance :
   - par le cours en cas de loi usuelle,
   - par la définition,
   - en utilisant la linéarité,
   - en utilisant la fonction génératrice.
4. Calculer une variance :
   - par le cours en cas de loi usuelle,
   - par la formule de Koenig-Huygens,
   - en utilisant la formule de développement de la somme (avec le cas particulier d'indépendance),
   - en utilisant la fonction génératrice.
5. Calculer une fonction génératrice. S'en servir pour reconnaître une loi ou calculer une espérance ou une variance ou montrer que deux variables aléatoires sont indépendantes.
6. Appliquer l'inégalité de Markov ou de Bienaymé-Tchebychev.

III Les erreurs à éviter

1. **LE CAS INDEPENDANT N'EST PAS LE CAS GENERAL ! ! !** Notamment :
   (a) Les lois marginales ne suffisent pas à obtenir la loi conjointe.
   (b) L'espérance du produit n'est pas le produit des espérances.
   (c) La variance de la somme n'est pas la somme des variances.
   (d) Si deux variables aléatoires sont non corrélées (de covariance nulle) cela ne signifie pas qu'elles sont indépendantes.
   (e) La fonction génératrice de la somme n'est pas le produit des fonctions génératrices.
2. L'espérance et la variance ne suffisent pas pour connaitre une loi mais la fonction génératrice si.
3. Ne pas confondre $X = Y$ avec $X \sim Y$.
4. Ne jamais écrire $\mathbb{P}(X)$ ou $\mathbb{P}(X = 2) \cap \mathbb{P}(Y = 3)$.
5. Ne pas oublier les oublier les valeurs absolues dans les inégalités de Markov ou Bienaymé-Tchebychev.

IV Les réponses du cours

1. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, (X, Y) un couple de variables aléatoires sur Ω. LA loi conjointe de (X, Y) est donnée par la donnée de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et
$$\forall (i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \text{le calcul de } \mathbb{P}(X = i, Y = j).$$
2. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, (X, Y) un couple de variables aléatoires sur Ω. Les lois marginales du couple (X, Y) sont les lois de X et de Y :
   - la donnée de $X(\Omega)$ et pour tout $i \in X(\Omega)$, le calcul de $\mathbb{P}(X = i)$,
   - la donnée de $Y(\Omega)$ et pour tout $j \in Y(\Omega)$, le calcul de $\mathbb{P}(Y = j)$.

   En pratique, à partir de la loi conjointe : puisque $(Y = j)_{j \in Y(\Omega)}$ forme un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales,
$$\forall i \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = i) = \sum_{j \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = i, Y = j).$$
   De même, puisque $(X = i)_{i \in X(\Omega)}$ forme un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales,
$$\forall j \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = i, Y = j).$$
3. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, (X, Y) un couple de variables aléatoires sur Ω. Soit $j \in Y(\Omega)$ une issue non négligeable, $\mathbb{P}(Y = j) \neq 0$. La loi conditionnelle de X sachant $Y = j$ est donnée par $X(\Omega)$ et
$$\forall i \in X(\Omega), \quad \text{le calcul de } \mathbb{P}(X = i \mid Y = j).$$
4. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω. On dit que X et Y sont indépendantes si et seulement si
$$\forall (i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i)\, \mathbb{P}(Y = j).$$
   Soient $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires définies sur Ω. Les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont (mutuellement) indépendantes si et seulement si
$$\forall (i_1, \ldots, i_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots X_n(\Omega), \quad \mathbb{P}(X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_1 = i_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = i_n).$$
5. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $X_1, \ldots, X_p, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes et f et g deux fonctions. Alors,
$$f(X_1, \ldots, X_p) \text{ et } g(X_{p+1}, \ldots, X_n) \text{ sont indépendantes.}$$
6. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur Ω. On a
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \mathbb{P}(X = k).$$
7. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire définie sur Ω et f une fonction. Alors,
$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k) \mathbb{P}(X = k).$$
8. L'espérance est
   - *linéaire* $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$,
   - *croissance* si $X \leqslant Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$,
   - *positive* si $X \geqslant 0$, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$,
   - *vérifie l'inégalité triangulaire* $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|)$.
9. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur Ω. Par définition,
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right).$$
   Par la formule de Koenig-Huygens,
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

10. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω et a et b deux réels. Alors la covariance est définie par
$$\text{Cov}\,(X, Y) = \mathbb{E}\,(XY) - \mathbb{E}\,(X)\,\mathbb{E}\,(Y)\,.$$
De plus,
$$\mathbb{V}\,(aX + bY) = a^2\mathbb{V}\,(X) + 2ab\text{Cov}\,(X, Y) + b^2\mathbb{V}\,(Y)\,.$$

11. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans $[\![0; n]\!]$, $n \in \mathbb{N}$. Alors la fonction génératrice de X est définie par
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \mathbb{P}\,(X = k)\,.$$

12. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans $[\![0; n]\!]$, $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\mathbb{E}\,(X) = G_X'(1) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\,(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2.$$

13. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Alors,
$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,(XY) &= \mathbb{E}\,(X)\,\mathbb{E}\,(Y) \\ \text{Cov}\,(X, Y) &= 0 \\ \mathbb{V}\,(X + Y) &= \mathbb{V}\,(X) + \mathbb{V}\,(Y) \\ G_{X+Y} &= G_X G_Y\,. \end{aligned}$$