

Fiche de révisions : équations complexes

I Le cours

1. Définir l'exponentielle complexe.
2. Préciser $|e^z|$, $\arg(e^z)$, $\operatorname{Re}(e^z)$ et $\operatorname{Im}(e^z)$.
3. Définir une racine carrée complexe.
4. Énoncer la proposition retournant les racines carrées d'un complexe.
5. Donner les racines d'un trinôme. On veillera à bien définir toutes les quantités.
6. Énoncer la proposition reliant les coefficients d'un trinôme à ses racines.
7. Définir l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité. Que dire du produit de deux racines n -ième de l'unité ? de l'inverse d'une racine n -ième de l'unité ? de son conjugué ?
8. Caractériser l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.
9. Définir j . Que vaut j^2 ? j^3 ? $1 + j + j^2$?
10. Caractériser les racines n -ièmes de l'unité par une somme.
11. Factoriser $z^n - 1$ et $1 + z + \dots + z^{n-1}$.
12. Énoncer la propriété donnant les racines n -ièmes d'un complexe quelconque.
13. Caractériser l'alignement des trois points et les triangles rectangles.
14. Donner l'application complexe associée à une translation, une rotation et une homothétie.

II Les savoir-faire

1. Manipuler l'exponentielle complexe, savoir résoudre une équation avec de l'exponentielle complexe.
2. Savoir calculer les deux racines carrées d'un complexe :
 - par la forme polaire en priorité lorsque c'est possible,
 - sinon par la forme algébrique : $\omega^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} \omega^2 = z \\ |\omega|^2 = |z| \end{cases} \Leftrightarrow \dots$
3. Résoudre une équation du second degré.
4. Déterminer les racines d'un complexe de plus haut degré :
 - par la factorisation en trouvant une racine « évidente »
 - en déterminant les racines réelles ($z = x$) et/ou imaginaires pures ($z = iy$), puis en factorisant.
5. Savoir donner les racines n -ièmes de 1 ou d'un complexe z quelconque.
6. Savoir manipuler une racine n -ième de l'unité avec les relations suivantes :

$$\omega^n = 1, \quad 1 + \omega + \dots + \omega^{n-1} = 0.$$

7. Résoudre une équation de la forme $Z_1^n = Z_2^n$ ou $1 + Z + Z^2 + \dots + Z^n = 0$.
8. Savoir passer d'un problème géométrique à une équation complexe et réciproquement.
9. Savoir représenter graphiquement un ensemble de complexes.
10. Savoir reconnaître une similitude :
 - on cherche ω le point fixe,
 - on réécrit l'équation $s(z) = a(z - \omega) + \omega$,
 - on conclut.

III Les erreurs à éviter

1. L'exponentielle complexe n'est jamais nulle mais n'est pas forcément positive : un complexe quelconque n'a pas de signe. JAMAIS d'inégalité dans $\mathbb{C}$!
2. Le symbole $\sqrt{\cdot}$ est strictement réservé aux réels positifs. Ne jamais écrire $\sqrt{-3}$, $\sqrt{i}$ ou $\sqrt{5+2i}$.
3. Ne pas confondre les racines n -ièmes de l'unité avec les racines n -ièmes de z .
4. Il y a toujours n racines n -ièmes. L'indice k varie donc entre 0 et $n-1$ et non entre 0 et n .
5. Ne pas confondre $\mathbb{U}_n$ et $\mathbb{U}$.
6. Ne pas confondre i et j . Le j en physique n'est pas le même que celui en maths.
7. $z + iz' = 0$ n'implique pas $z = z' = 0$ sauf si z et z' sont tous les deux réels.

IV Les réponses du cours

1. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a $e^z = e^a e^{ib} = e^a \cos(b) + i e^a \sin(b)$.
2. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$|e^z| = e^a, \quad \arg(e^z) \equiv b \pmod{2\pi}, \quad \operatorname{Re}(e^z) = e^a \cos(b), \quad \operatorname{Im}(e^z) = e^a \sin(b).$$

3. Soit $(z, \omega) \in \mathbb{C}^2$. On dit que ω est une racine carrée de z si et seulement si $\omega^2 = z$.
4. Soit $z = r e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Alors l'équation $\omega^2 = z$ d'inconnu $\omega \in \mathbb{C}$ admet exactement deux solutions données par :

$$\omega_1 = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = -\omega_1 = \sqrt{r} e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)}.$$

5. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$.
 - Si $\Delta = 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une unique solution $z_0 = -\frac{b}{2a}$.
 - Si $\Delta \neq 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet exactement deux solutions données par

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a},$$

où δ est UNE racine carrée de Δ .

6. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ et z_1 et z_2 les deux racines (éventuellement confondues) de $az^2 + bz + c$. Alors,

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}.$$

De plus, pour tout $(z, z') \in \mathbb{U}_n$, on a

$$zz' \in \mathbb{U}_n, \quad \frac{1}{z} = \bar{z} \in \mathbb{U}_n.$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a l'égalité suivante :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}.$$

9. On a $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. De plus,

$$j^2 = \bar{j}, \quad j^3 = 1 \quad \text{et} \quad 1 + j + j^2 = 0.$$

10. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n-1} z^k = 1 + z + \cdots + z^{n-1} = 0.$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right) \quad \text{et} \quad 1 + z + \cdots + z^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right).$$

12. Soit $z = r e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, on a

$$\omega^n = z \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \quad \omega = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}.$$

13. Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ trois points distincts. On a

- A , B et C alignés si et seulement si $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv 0 \pmod{\pi}$ i.e. $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$.
- ABC rectangle en A si et seulement si $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ i.e. $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}$.

14. • Soit $b \in \mathbb{C}$. La translation de vecteur $\vec{u}(b)$ est caractérisée par

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \tau_{\vec{u}} : z &\mapsto z + b. \end{aligned}$$

- Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}$. La rotation d'angle θ et de centre $\Omega(\omega)$ est caractérisée par

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ r_{\Omega, \theta} : \\ z &\mapsto e^{i\theta} (z - \omega) + \omega. \end{aligned}$$

- Soient $k \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}$. L'homothétie de rapport k et de centre $\Omega(\omega)$ est caractérisée par

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ h_{\Omega, k} : \\ z &\mapsto k (z - \omega) + \omega. \end{aligned}$$