# Fiche de révisions : équations différentielles

## I Le cours

A l'ordre 1 :

1. Enoncer le théorème donnant l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions d'une équation homogène d'ordre 1.
2. Enoncer la proposition qui affirme que l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel.
3. Enoncer le théorème donnant l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions d'une équation différentielle d'ordre 1 à partir d'une solution « particulière ».
4. Enoncer le principe de superposition à l'ordre 1.
5. Définir un problème de Cauchy à l'ordre 1. Propriété ?
6. Enoncer comment obtenir une solution particulière à l'ordre 1 lorsque le second membre est spécifique.

A l'ordre 2 :

7. Définir l'équation caractéristique.
8. Donner l'ensemble des solutions dans le cas réel et homogène d'une équation différentielle d'ordre 2.
9. Enoncer le théorème donnant l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions d'une équation différentielle d'ordre 2 à partir d'une solution « particulière ».
10. Enoncer le principe de superposition à l'ordre 2.
11. Enoncer comment obtenir une solution particulière à l'ordre 2 lorsque le second membre est spécifique.
12. Définir un problème de Cauchy à l'ordre 2.

## II Les savoir-faire

A l'ordre 1 :

1. Savoir résoudre une équation différentielle homogène d'ordre 1 en trouvant une primitive de $a$.
2. Savoir résoudre une équation différentielle non homogène d'ordre 1 :
   (a) par la méthode de variation de la constante,
   (b) par la recherche d'une solution particulière quand $a$ est constant et $b(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{mx}$.
3. Savoir appliquer le principe de superposition pour se ramener au cas 2b
4. Savoir donner une équation différentielle complexe pour se ramener au cas 2b
5. Savoir déterminer la constante pour résoudre un problème de Cauchy d'ordre 1.
6. Savoir faire un problème de raccord.

A l'ordre 2 :

7. Savoir résoudre une équation différentielle homogène d'ordre 2 en déterminant les racines de l'équation caractéristique.
8. Savoir résoudre une équation différentielle non homogène d'ordre 2 lorsque $d(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{mx}$.
9. Savoir appliquer le principe de superposition pour se ramener au cas 8
10. Savoir donner une équation différentielle complexe pour se ramener au cas 8 lorsque $d(x) = P(x)\cos(x)$ ou $P(x)\sin(x)$.
11. Savoir déterminer les constantes pour résoudre un problème de Cauchy d'ordre 2.
12. Utiliser le théorème de Cauchy pour affirmer l'unicité de la solution (ordre 1 ou 2).
13. Savoir faire un changement de fonction $z = \frac{1}{y}$ par exemple pour se ramener à une équation du cours.
14. Savoir faire un changement de variable $x = \mathrm{e}^t$ en posant $z(t) = y\left(\mathrm{e}^t\right)$ par exemple pour se ramener à une équation du cours.

# III Les erreurs à éviter

A l'ordre 1 :

1. Bien mettre l'équation sous-forme résolue : le coefficient devant $y'$ doit être de 1 à l'ordre 1, ne résoudre des équations différentielles que sur des **intervalles**.
2. Ne pas oublier le $-$ dans la formule $\mathrm{e}^{-A(x)}$.
3. Ne pas prendre $y_0$ quelconque dans la méthode de variation de la constante mais préciser exactement ce que vaut $y_0$.
4. Ne pas oublier de parler de la dérivabilité de $y$ et de $\lambda$ dans la méthode de variation de la constante.
5. Mettre des équivalents et des $\forall x$ PARTOUT !
6. Ne pas oublier la constante d'intégration lorsque l'on obtient une primitive.
7. Ne pas oublier de revenir à $y$ à la fin (ne pas rester sur $\lambda$).

A l'ordre 2 :

8. Savoir que les coefficients sont tous constants devant $y$, $y'$ et $y''$, seul le second membre $d$ peut-être variable.
9. Ne pas confondre l'ordre 1 et l'ordre 2. L'équation caractéristique n'est valide que pour l'ordre 2 (à coefficients constants).
10. Si le second membre est $x^3$ par exemple, ne pas chercher $y_p(x) = ax^3$ mais bien sous la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$.
11. Ne pas oublier d'augmenter $y_p$ par $x$ ou $x^2$ si $m$ (dans $P(x)\,\mathrm{e}^{mx}$) est racine simple ou double de l'équation caractéristique.

# IV Les réponses du cours

A l'ordre 1 :

1. Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a$ une fonction continue sur $I$, $A$ une primitive de $a$ sur $I$ alors l'ensemble des solutions de
$$(E_0) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = 0$$
est donnée par
$$\mathscr{S}_0 = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-A(x)} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{-A(x)} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. L'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions d'une équation homogène vérifie :
   - La fonction nulle est dans $\mathscr{S}_0$
   - Pour tout $(f,g) \in \mathscr{S}_0^2$ et tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, on a $\lambda f + \mu g \in \mathscr{S}_0$.

3. Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a$ et $b$ deux fonctions continues sur $I$, $y_p$ une solution de
$$(E) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$
et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de
$$(E_0) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = 0.$$
Alors, $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de $(E)$ est donné par
$$\mathscr{S} = y_p + \mathscr{S}_0 = \{ y_p + y_0 \mid y_0 \in \mathscr{S}_0 \}.$$

4. Soient $I$ un intervalle, $a$, $b_1$ et $b_2$ trois fonctions continues sur $I$, $y_1$ une solution de
$$(E_1) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b_1(x)$$
et $y_2$ une solution de
$$(E_2) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b_2(x).$$
Alors, $y_1 + y_2$ est une solution de
$$(E) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b_1(x) + b_2(x)$$

5. Soient $I$ un intervalle, $a$ et $b$ deux fonctions continues sur $I$, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ alors le problème suivant d'inconnue $y$ une fonction dérivable sur $I$ est un problème de Cauchy
$$(\mathscr{P}) \begin{cases} \forall t \in I,\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
De plus, tout problème de Cauchy admet une et une seule solution.

6. Soient $I$ un intervalle, $a \in \mathbb{K}$ **constant**, $P$ une fonction polynomiale, $m \in \mathbb{K}$ et
$$(E) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{mx}.$$
Alors,
   - Si $m \neq -a$, une solution sera sous la forme $\forall x \in I,\ y_p(x) = Q(x)\,\mathrm{e}^{mx}$ avec $\deg(Q) = \deg(P)$.
   - Si $m \neq -a$, une solution sera sous la forme $\forall x \in I,\ y_p(x) = xQ(x)\,\mathrm{e}^{mx}$ avec $\deg(Q) = \deg(P)$.

A l'ordre 2 :

7. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $d : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur $I$. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle
$$(E) \ : \quad \forall x \in I,\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x),$$
est donnée par
$$(E_c) \ : \quad ar^2 + br + c = 0.$$

8. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$ et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de
$$(E_0) \ : \quad \forall x \in \mathbb{R},\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0,$$
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique $(E_c)$ associée à $(E)$.
   - Si $\Delta > 0$, en notant $r_1$ et $r_2$ les deux racines distinctes de $(E_c)$,
$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & K_1 \,\mathrm{e}^{r_1 x} + K_2 \,\mathrm{e}^{r_2 x} \end{array} \ \middle|\ (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
   - Si $\Delta = 0$, en notant $r_0$ l'unique racine double de $(E_c)$,
$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (K_1 + K_2 x)\,\mathrm{e}^{r_0 x} \end{array} \ \middle|\ (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
   - Si $\Delta < 0$, en notant $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ les deux racines complexes conjuguées de $(E_c)$,
$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{\alpha x}\left(K_1 \cos(\beta x) + K_2 \sin(\beta x)\right) \end{array} \ \middle|\ (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
9. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $d : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur $I$, $y_p$ une solution de
$$(E) \qquad \forall x \in I, \qquad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$$
et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de
$$(E_0) \qquad \forall x \in I, \qquad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0.$$
Alors, $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de $(E)$ est donné par
$$\mathscr{S} = y_p + \mathscr{S}_0 = \{\, y_p + y_0 \mid y_0 \in \mathscr{S}_0 \,\}.$$
10. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $d_1 : I \to \mathbb{K}$ et $d_2 : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues sur $I$ et $(E_1)$, $(E_2)$ et $(E)$ les équations suivantes :
$$\begin{array}{lll} (E_1) & \forall x \in I, & ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_1(x) \\ (E_2) & \forall x \in I, & ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_2(x) \\ (E) & \forall x \in I, & ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_1(x) + d_2(x). \end{array}$$
Si $y_1$ est une solution de $(E_1)$ et si $y_2$ est une solution de $(E_2)$ alors $y_1 + y_2$ est une solution de $(E)$.
11. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $d : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur $I$, $t_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$. Alors le problème de Cauchy
$$(\mathscr{P}) \ : \ \begin{cases} (E) \qquad \forall t \in I, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t) \\ y(t_0) = y_0 \text{ et } y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$
admet une unique solution.
12. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $P$ une fonction polynomiale, $m \in \mathbb{K}$,
$$(E) \qquad \forall x \in I, \qquad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{mx}.$$
et $(E_c)$ l'équation caractéristique associée. Alors,
   - Si $m$ n'est pas solution de $(E_c)$, une solution sera sous la forme $\forall x \in I$, $y_p(x) = Q(x)\,\mathrm{e}^{mx}$ avec $\deg(Q) = \deg(P)$.
   - Si $m$ est racine simple de $(E_c)$, une solution sera sous la forme $\forall x \in I$, $y_p(x) = xQ(x)\,\mathrm{e}^{mx}$ avec $\deg(Q) = \deg(P)$.
   - Si $m$ est racine double de $(E_c)$, une solution sera sous la forme $\forall x \in I$, $y_p(x) = x^2 Q(x)\,\mathrm{e}^{mx}$ avec $\deg(Q) = \deg(P)$.