

Méthodes d'études de suites numériques

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite étudiée.

I On reconnaît une suite du cours

1. La suite est arithmétique ou géométrique

Les résultats sont directs.

2. La suite est arithmético-géométrique, $u_{n+1} = au_n + b$

On cherche le point fixe ω puis on définit $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \omega$ et on montre que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.

3. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

On regarde l'équation caractéristique associée et suivant son discriminant, on obtient une expression de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de deux constantes λ et μ que l'on détermine à l'aide des premiers termes u_0 et u_1 .

II La suite est explicite, $u_n = f(n)$

Ici f est une fonction.

1. Définition

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie si f est définie sur $\mathbb{N}$. Eventuellement $(u_n)_{n \geq n_0}$ n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0 si f est définie sur $\llbracket n_0 ; +\infty \llbracket$ en particulier si elle est définie sur $[n_0 ; +\infty[$.

2. Bornitude

Si f est bornée/majorée/minorée sur $\mathbb{N}$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée/majorée/minorée.

3. Monotonie

Si f est monotone (strictement) sur $\mathbb{R}_+$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi monotone (strictement) et de même monotonie que f .

4. Convergence

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors, par caractérisation séquentielle de la limite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

III La suite est implicite, u_n est solution d'une équation $f_n(x) = 0$

Ici $f_1, f_2, f_3, \dots$ sont des fonctions. Eventuellement la suite est définie comme solution de $g_n(x) = a$ ou $a \in \mathbb{R}$, ce qui se ramène à $f_n(x) = 0$ en posant $f_n = g_n - a$.

1. Définition

A n fixé, on utilise le théorème de la bijection pour démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution.

2. Bornitude

Si par exemple f_n est strictement croissante et si $f_n(a) < 0$ alors $f_n(a) < f_n(u_n)$ et donc $a < u_n$. Même raisonnement pour montrer que $u_n < b$. On peut aussi l'adapter si f_n est strictement décroissante.

3. Monotonie

Si par exemple f_n est strictement croissante et si $f_n(u_{n+1}) < 0$ alors $u_{n+1} < u_n$ et si ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante. On peut raisonner de la même façon si $f_n(u_{n+1}) > 0$ ou si f_n est strictement décroissante ou on peut aussi parler de la monotonie de f_{n+1} et regarder $f_{n+1}(u_n)$ par rapport à $0 = f_{n+1}(u_{n+1})$.

IV La suite est récurrente, $u_{n+1} = f(u_n)$

Ici f est une fonction.

1. Définition

Si on montre que U est une partie stable de $f : f(U) \subseteq U$ et si $u_0 \in U$ (ou u_{n_0}), alors on démontre par récurrence (à faire!) que la suite est bien définie et à valeurs dans U .

2. Bornitude

On applique le même principe que ci-dessus avec un ensemble éventuellement V plus petit, et donc précis, que U . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in V$ est encadré par $\inf(V)$ et $\sup(V)$.

3. Monotonie

- Si f est (strictement) croissante alors, on démontre par récurrence (à faire!) que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (strictement) monotone et sa monotonie est donnée par la comparaison de u_0 et u_1 (croissante si $u_0 \leq u_1$, décroissante si $u_0 \geq u_1$ en adaptant pour la stricte monotonie).
- Si f est (strictement) décroissante alors la fonction $f \circ f$ est (strictement) croissante et on applique le raisonnement précédent aux suites des termes pairs $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et des termes impairs $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ car alors $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$ et $u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1})$ et on peut espérer que ces suites sont adjacentes.
- Etudier le signe de $f(x) - x$.

4. Convergence

- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors ℓ est nécessairement un point fixe de $f : f(\ell) = \ell$. Par contraposée, on a donc aussi que si f n'admet pas de point fixe, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.
- Si f est k -lipschitzienne, avec $k \in]0; 1[$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est contractante (en prenant $x = u_n$ et $y = u_{n-1}$,

$$|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leq k |u_n - u_{n-1}| \leq \dots \leq k^n |u_1 - u_0|.$$

Si f admet un point fixe là où elle est contractante, on a aussi (en prenant $x = u_{n-1}$ et $y = \ell$)

$$|u_n - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq k |u_{n-1} - \ell| \leq \dots \leq k^n |u_0 - \ell|.$$

Ce qui par passage à la limite permet de montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

V Autres techniques ou techniques transverses

1. Montrer que la suite est majorée/minorée/encadrée par des suites intéressantes et utiliser **le théorème d'encadrement** (utile souvent pour des suites définies comme étant des sommes).
2. Montrer que la suite est monotone (direct, par différence, par quotient lorsqu'elle est de signe constant) et majorée/minorée et utiliser **le théorème de la limite monotone**.
3. Rechercher un équivalent pour déterminer la limite d'une suite.
4. Utiliser une sous-suite divergente ou des sous-suites ne convergeant pas vers le même limite pour montrer que la suite diverge.

